

NALOGA: NAJ BO FUNKCIJA f PODANA S PREDPISOM

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \geq 1, \\ ax+b; & 0 \leq x < 1, \\ 2\arctan x + c; & x < 0. \end{cases}$$

- (a) DOLOČI KONSTANTE $a, b, c \in \mathbb{R}$ TAKO, DA BO f ZVEZNO ODVEDLJIVA NA $\mathbb{R}$.
- (b) DOLOČI ZALOGO VREDNOSTI zf .
- (c) POKAŽI, DA OBSTAJA INVERZNA FUNKCIJA f^{-1} .

REŠITEV: KAJ VEMO?

- ~ ELEMENTARNE FUNKCIJE SO ODVEDLJIVE NA SVOJIH DEFINICIJSKIH OBMOČJIH.
- ~ NA ODPRTIH INTERVALIH LAHKO ODVOD IZRAČUNAMO NA OBČAJEN NAČIN. PROBLEM SO IZOLIRANE TOČKE IN UJEMANJE 'NA ROBOVIH'.
- ~ ODVEDLJIVOST IMPLICIRA ZVEZNOST, ZATO TE NI TREBA POSEBEJ PREVERJATI.

IZRAČUNAJMO ODVODE ZA f V VSEH TOČKAH $\mathbb{R}$:

- $x > 1$: $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$,
- $0 < x < 1$: $f(x) = ax + b$, $f'(x) = a$,
- $x < 0$: $f(x) = 2\arctan x + c$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
- $x = 1$: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h} =$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1+2h+h^2-1}{h}, & h > 0 \\ \frac{a+ah+b-1}{h}, & h < 0 \end{cases} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 2+h, & h > 0 \\ a + \frac{a+b-1}{h}, & h < 0 \end{cases} =$$

OPAZIMO: NUJNI POGOJ ZA OBSTOJTE LIMITE JE

$$a + b - 1 = 0$$

$$\boxed{a + b = 1}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 2+h, & h > 0 \\ a, & h < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2, & h > 0 \\ a, & h < 0 \end{cases} = 2$$

OPAZIMO: TA ODVOD OBSTAJA NATANKO TEDAJ,

KO JE $\boxed{a = 2}$. POSLEDIČNO JE $\boxed{b = -1}$.

$$\bullet x=0: f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - b}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{2h-1+1}{h}, & h > 0 \\ \frac{2 \arctan h + c + 1}{h}, & h < 0 \end{cases} =$$

$\uparrow$
 $b = -1$
 $a = 2$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 2, & h > 0 \\ \frac{2 \arctan h}{h} + \frac{c+1}{h}, & h < 0 \end{cases}$$

NA TEM MESTU MALO GOLJUFAMO IN UPORABIMO

L'HOSPITALOVO PRAVILO: TIP $\frac{0}{0}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \arctan h}{h} \xleftarrow{\text{L'HOSPITAL}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{1+h^2}}{1} = 2$$

OPAZIMO: NUJEN POGOJ ZA OBSTOJ LIMITE JE

$$c+1=0 \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

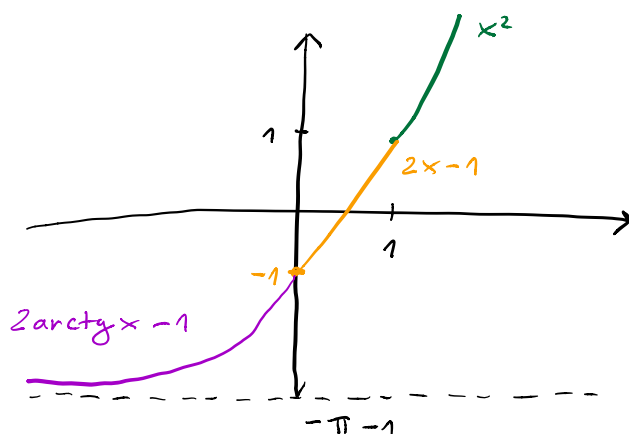
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} 2; & h > 0 \\ \frac{2 \arctan h}{h}, & h < 0 \end{cases} = 2$$

KO SO $a=2$, $b=-1$ IN $c=-1$ TOREJ VELJA:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x; & x > 1 \\ 2; & x = 1 \\ 2; & 0 < x < 1 \\ 2; & x = 0 \\ \frac{2}{1+x^2}; & x < 0 \end{cases}$$

KER JE f' ZVEZNA NA $\mathbb{R}$, JE f ZVEZNO ODVEDLJIVA.

(b) SKICIRAJMO GRAF f PRI TEH PARAMETRIH.



Ključna ideja: Graf se nikjer 'ne prelomi', ker f' zvezna.

$$\text{RAZBEREMO: } \boxed{Z_f = (-\pi - 1, \infty)}$$

(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi - 1, \infty)$ JE STROGO NARAŠČAJOČA IN

ŽATO INJEKTIVNA. TOREJ OBSTAJA $f^{-1}: (-\pi - 1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

NALOGA: NAD BO $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ODVEDLJIVA V $x=0$,
ZA VSAKA $x, y \in \mathbb{R}$ PA NAJ VELJA:

$$f(x+y) = 2f(x) \cdot f(y).$$

DOKAŽI, DA JE f ZVEZNO ODVEDLJIVA NA $\mathbb{R}$.

REŠITEV: VSTAVIMO V ZVEZO $x=y=0$:

$$f(0) = 2f(0)^2$$

$$0 = f(0) (2f(0) - 1)$$

IMAMO DVE MOŽNOSTI:

(i) $f(0) = 0$;

POTEM ZA $x \in \mathbb{R}$ IN $y=0$ VELJA:

$$f(x) = f(x+0) = 2f(x) \cdot f(0) = 0$$

FUNKCIJA $f(x) = 0$ JE ZVEZNO ODVEDLJIVA.

(ii) $f(0) = \frac{1}{2}$;

POKAŽIMO, DA JE f ODVEDLJIVA ZA $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(a) \cdot f(h) - f(a)}{h} = \\ &= 2f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - \frac{1}{2}}{h} = 2f(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &\quad \uparrow \text{KLJUČEN TRIK} \\ &= 2f(a) \cdot f'(0). \\ &\quad \uparrow \text{PO DEFINICIJI} \end{aligned}$$

SKLEP: KER JE f ODVEDLJIVA V $x=0$, OBSTAJA $f'(0)$.

Torej obstaja tudi $f'(a) = 2f(a) \cdot f'(0)$.

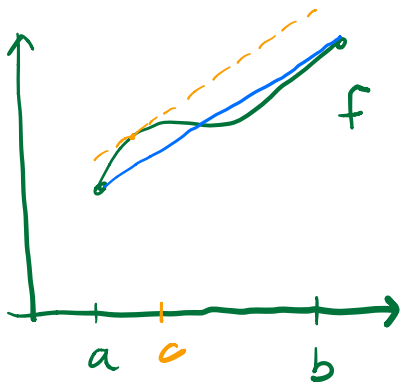
Še več, ker je f odvedljiva v a , je tam tudi zvezna. Torej je predpis

$f': a \rightarrow 2f(a) \cdot f'(0)$ zvezna funkcija in je f zvezno odvedljiva.

LAGRANGEEV IZREK:

NAJ BO $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva na (a,b) .
Potem obstaja $c \in (a,b)$, za katerega velja:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

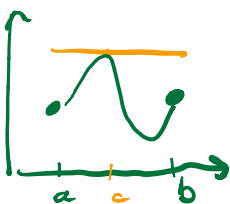


OBSTAJA $c \in (a,b)$, v katerem ima tangenta na graf f isti naklonski kot kot sekanta skozi $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

OPOMBA: V TEJ SKICI JE f ZVEZNO ODVEDLJIVA, Vendar to ni potreben pogoj.

POSLEDICA: ROLLOV IZREK

NAJ BO $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva na (a,b) .
Če $f(a) = f(b)$, obstaja $c \in (a,b)$, da $f'(c) = 0$.



VMES MORA OBSTAJATI vsaj ena stac. točka

NALOGA: POKAŽI, DA ZA $a > 0$ VELJA $\frac{1}{a+1} < \ln(1 + \frac{1}{a}) < \frac{1}{a}$.

NAMIGA: $F(x) = \ln x$ NA $[a, a+1]$.

REŠITEV: OGLEDIMO SI FUNKCIJO IZ NAMIGA.

$F(x) = \ln x$ JE ZVEZNA NA $[a, a+1]$ IN

TUDI ODVEDLJIVA NA $(a, a+1)$. TOREJ

LATKO ZANJO UPORABIMO LAGRANGEEV IZREK.

t.j. $\exists c \in (a, a+1)$:

$$\begin{aligned} F'(c) &= \frac{F(a+1) - F(a)}{a+1 - a} = \ln(a+1) - \ln(a) = \\ &= \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

DOBILI SMO IZRAZ IZ NAŠE NEENAKOSTI, DODATNO
PA VEMO, DA JE:

$$F'(c) = \frac{1}{c} \quad \text{ZA NEK } c \in (a, a+1).$$

OD TOD SLEDI OCENA:

$$\left[\frac{1}{a+1} < \frac{1}{c} = \ln\left(1 + \frac{1}{a}\right) < \frac{1}{a} \right]$$

NALOGA:

(a) POKAŽI, DA JE FUNKCIJA $f(x) = \arctan x$ ENAKOMERNO ZVEZNA NA $\mathbb{R}$.

(b) POKAŽI, DA TO VELJA ZA POLJUBNO $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, KJER JE I INTERVAL IN f ODVEDLJIVA Z OMEJENIM ODVODOM.

SPOMNIMO:

f JE ENAKOMERNO ZVEZNA NA $D \subseteq \mathbb{R}$,
ČE ZA VSAK $\varepsilon > 0$ OBSTAJA $\delta > 0$,
DA IZ $|y - x| < \delta$ SLEDI $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

REŠITEV: (a) KAJ NAM O f POVE LAGRANGEOV IZREK?

NAJ BO $x < y$. POTEM $\exists c \in (x, y)$, DA JE:

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

OD TOD SLEDI:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y|$$

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{1+c^2} |x-y| \leq |x-y| < \delta = \varepsilon$$

$\uparrow$
ZA VSAK
 $c \in \mathbb{R}$

t.j. ZA POLJUBEN $\varepsilon > 0$ LAHKO IZBEREMO KAR $\delta = \varepsilon$.

(b) PODOBNO POSTOPAMO PRI POLJUBNI FUNKCiji $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

NAJ BO $L > 0$ TAKA DA $|f'(x)| < L$ ZA $x \in I$.

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| < L |x - y| = L \cdot \delta = \varepsilon$$

USTREZEN JE $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.

KONENE OPOMBE:

~ Če za f na D obstaja $L > 0$, da za $x, y \in D$ velja $|f(x) - f(y)| < L|x - y|$ pravimo, da je f LIPSHITZOVA NA D . DOKAZALI SMO, DA JE $\arctan x$ LIPSHITZOVA NA $\mathbb{R}$ S KONSTANTO $L = 1$.

~ VSE LIPSHITZOVE FUNKCIJE NA D SO TAM TUDI ENAKOM. ZVEZNE, SAJ LAHKO VZAMEMO $\delta = \frac{\epsilon}{L}$. OBRATNO NE VELJA! $\sqrt{x}$ JE ENAKOM. ZVEZNA NA $\mathbb{R}_+$ A NI LIPSHITZOVA.

~ V TOČKI (b) SMO VIDELI, DA SO ODVEDLJIVE FUNKCIJE Z OMEJENIM ODVODOM LIPSHITZOVE IN ZATO ENAK. ZVEZNE.