

Upogib tanke opne na krožni zanki

Osnovni pristopi pri matematičnem modeliranju

- Preprost opis problema.
- Izpeljava (ustreznega) matematičnega modela.
- Implementacija v primernem programskem okolju.
- Preverjanje rešitev in izboljšave.

Upogib opne

- Kot primer si bomo ogledali **modeliranje upogiba tanke opne, napete na krožno zanko**.
- Predpostavili bomo, da **na opno deluje zunanja sila** (teže), ki je lahko
 - ▶ konstantna,
 - ▶ sorazmerna z debelino opne,
 - ▶ ...

- Predpostavimo lahko, da **zanka z radijem R leži v ravnini xy in ima središče v $O(0,0)$.**
- Označimo z **D notranjost kroga**, ki ga omejuje zanka in z **∂D njegov rob** (torej krožnico z radijem R in središčemo v $O(0,0)$).
- Naj bo **$u : D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija**, za katero je **$u(x,y)$ upogib opne v točki $(x,y) \in D$.**
- Izkaže se, da mora u zadoščati naslednjemu robnemu problemu:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in D \\ u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial D,\end{aligned}\tag{1}$$

kjer je

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Laplaceov operator in f zunanja sila na opno (pozitivna, vendar smatramo, da deluje navzdol).

- Iščemo torej tako dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo u na D , ki zadošča pogoju (1), je na robu enaka nič in je zvezna na $D \cup \partial D$ (t.i. **klasična rešitev robnega problema**).
- Rešitev le **redko lahko poiščemo v zaključeni obliki** (razmislite denimo o primeru, ko je $f(x, y) \equiv 0$).

- Gleden na geometrija problema je smiselno uvesti polarne koordinate

$$x = r \cos \phi,$$

$$y = r \sin \phi,$$

kjer je $(r, \phi) \in [0, R] \times [0, 2\pi)$.

- Laplaceov operator se iz kartezičnih v polarne koordinate prepíše kot

$$\Delta v(r, \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2},$$

kjer je $v(r, \phi) = u(x, y)$.

- Če predpostavimo, da je opna homogena, je problem **krožno simetričen**. Torej za v rešujemo naslednji problem

$$\begin{aligned}\Delta v(r, \phi) &= f(r \cos \phi, r \sin \phi), & (r, \phi) &\in (0, R) \times (0, 2\pi) \\ v(R, \phi) &= 0, & \phi &\in [0, 2\pi).\end{aligned}\quad (2)$$

- Zaradi krožne simetrije sta v in f neodvisni od ϕ , torej je $v(r, \phi) =: v(r)$ in $f(r \cos \phi, r \sin \phi) =: f(r)$.
- Problem (2) tako prepišemo v

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = f(r), \quad r \in [0, R], \quad v(R) = 0. \quad (3)$$

- V (3) prepoznamo navadni robni problem drugega reda.
- Na videz ima samo en robni pogoj $v(R) = 0$.
- Pogoj $v'(0) = 0$ sledi iz matematično-fizikalnega razmisleka: krožno simetrična opna ima v sredini minimum.
- V resnici torej rešujemo robni problem drugega reda z mešanimi robnimi pogoji

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = f(r), \quad r \in [0, R], \quad v(R) = 0, \quad v'(0) = 0. \quad (4)$$

Primer

Analitično rešimo robni problem

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = 1, \quad r \in [0, 1], \quad v(1) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

Enačbo prevedemo na nehomogeno Eulerjevo enačbo drugega reda, katere splošna rešitev je

$$v(r) = \frac{r^2}{4} + A \log r + B.$$

Konstanti določimo iz robnih pogojev in dobimo

$$v(r) = \frac{r^2 - 1}{4}.$$

Opomba: Problem ustreza upogibu opne, kjer na opno deluje konstantna sila velikosti 1.

Numerično reševanje problema

- Ker problema v splošnem ne znamo rešiti analitično, bomo uporabili eno od numeričnih metod (**metodo končnih diferenc**).
- Interval $[0, R]$ razdelimo na n enako dolgih podintervalov.
Izberimo torej

$$r_0 := 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{n-1} < r_n := R,$$

kjer je

$$h := r_{i+1} - r_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

- Izračunati želimo približke $v_i \approx v(r_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (ne spreglejte, da je zaradi robnih pogojev $v_n = v(R) = 0$).

- Če je delilnih točk dovolj (**h dovolj majhen**), bomo diferencialni enačbi v (4) približno zadostili, če ji zadostimo vsaj v točkah r_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.
- Uporabili bomo aproksimacije

$$v'(r_i) = \frac{v(r_{i+1}) - v(r_{i-1}))}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$$

$$v''(r_i) = \frac{v(r_{i-1}) - 2v(r_i) + v(r_{i+1}))}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2}.$$

- Ko zgornje aproksimacije uporabimo v enačbi (4) in pišemo $f(r_i) = f_i$, dobimo

$$\left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) v_{i-1} - 2v_i + \left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) v_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

- Pri $i = n - 1$ moramo upoštevati $v_n = 0$, torej je

$$\left(1 - \frac{h}{2r_{n-1}}\right) v_{n-2} - 2v_{n-1} = h^2 f_{n-1}.$$

Pri $i = 0$ pa zaradi pogoja $v'(0) = 0$ sledi $v_{-1} = v_1$ in zato

$$-2v_0 + 2v_1 = h^2 f_0.$$

- Sedaj lahko zapišemo **sistem linearnih enačb** za neznanke v_i ,
 $i = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned}
 -2v_0 + 2v_1 &= h^2 f_0 \\
 \left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) v_{i-1} - 2v_i + \left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) v_{i+1} &= h^2 f_i, \quad i = 1, \dots, n-2 \\
 \left(1 - \frac{h}{2r_{n-1}}\right) v_{n-2} - 2v_{n-1} &= h^2 f_{n-1}
 \end{aligned}$$

- Ker je sistem tridiagonalen, ga zapišemo v “kompaktni obliki” in rešimo s pomočjo funkcije `resi3.m` (glejte vaje).