

NALOGA:

POKAŽI, DA JE $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, PODANA S PREDPISOM:

$$f(x) = 3x + \sin(2x)$$

BIJEKTIVNA IN ENAKOMERNO ZVEŽNA. POKAŽI, DA JE TUDI NJEN INVERZ ENAKOMERNO ZVEŽEN.

ALI TO VELJA ZA VSAKO BIJEKCIJO $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow Z_f \subseteq \mathbb{R}$?

REŠITEV:

OGLEDJMO SI ODVOD:

$$f'(x) = 3 + 2\cos(2x) > 0.$$

TO POMENI, DA JE FUNKCIJA STROGO NARAŠČAJOČA IN POSLEDIČNO TUDI INJEKTIVNA NA $\mathbb{R}$. ZAKAJ JE SURJEKTIVNA?

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} 3x + \sin(2x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \left(3 + \frac{\sin(2x)}{x} \right) = \pm \infty$$

KER GRE ZA ZVEŽNO FUNKCIJO JE $Z_f = (-\infty, \infty)$.

ENAKOMERNO ZVEŽNOST UTEMELJIMO Z OMEJENOSTJO

$$\text{ODVODA: } |f'(x)| = |3 + 2\cos(2x)| \leq 5.$$

OD ZADNJE VEMO, DA PO LAGRANQU TO POMENI

$$|f(x) - f(y)| \leq 5|x - y| < 5\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{5}.$$

NADALJE VEMO, DA ZA ODVOD INVERZA VELJA:

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad /'$$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

KER JE $|f'(x)| = |3 + 2\cos 2x| \geq 1$, TO
POMENI, DA JE:

$$|(f^{-1})'(y)| \leq 1 \quad \text{ZA VSAK } y \in \mathbb{R},$$

KAR POMENI, DA JE TUDI f^{-1} ENAK. ZVEZNA.

V SPLOŠNEM TO NI NUJNO RES, SAJ LAHKO
GRE $|f'(x)| \rightarrow 0$ IN POSLEDIČNO $|(f^{-1})'(x)| \rightarrow \infty$.

PRIMER: $g: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$g(x) = \arctan x$$

$$|g'(x)| = \left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq 1, \quad \text{VENDAR} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |g'(x)| = 0.$$

TO SE ODRAZI PRI $g^{-1}: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \tan x$,
KI JE NEOMEJENA IN NI ENAK. ZVEZNA.

POSPLOŠENI ROLLOV IZREK:

NAJ BO f $(n-1)$ -KRAT ZVEZNO ODVEDLJIVA NA OKOLICI $[a, b]$
IN NAJ OBSTAJA $n-1$ ODVOD ZA f NA (a, b) . GE
ZA TOČKE $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ VELJA, DA JE

$$f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n),$$

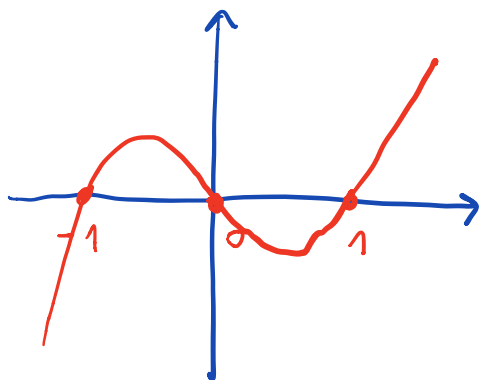
POTEM OBSTAJA $c \in (a, b)$, ZA KATEREGA JE $f^{(n)}(c) = 0$.

NALOGA:

(a) ILUSTRIRAJ IZREK ZA $f(x) = x^3 - x$, $n=2$,
 $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ IN $x_2 = 1$.

(b) DOKAŽI IZREK ZA SPLOŠNA $n \in \mathbb{N}$ IN f .

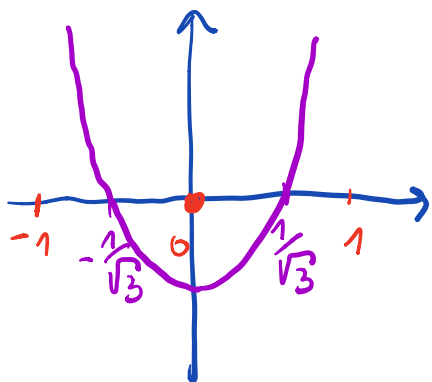
REŠITEV: $f(x) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$



$$f(0) = f(1) = f(-1) = 0$$

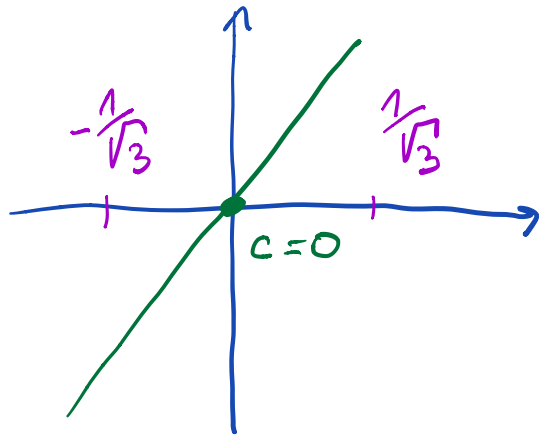
RADI BI VIDELI, DA TO IMPLICIRA
OBSTOJ $c \in (-1, 1)$, DA $f''(c) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



ENA NIČLA ODVODA JE
NA $(-1, 0)$, DRUGA PA NA $(0, 1)$.
TO ZAHOTOVI OBIČAJEN ROLLOV
IZREK ZA FUNKCIJO f .

$$f''(x) = 6x$$



NIČLA DRUGEGA ODVODA
JE NA $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

ZNOVA TO ZAGOTOVI ROLLOV
IZREK, VENDAR ZA FUNKCijo f' .

PO VZORU TEGA PRIMERA NAREDIMO DOKAZ ZA
SPLOŠEN $n \in \mathbb{N}$.

- IMAMO: $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, ZA KATERE JE
 $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$.

KER JE f ZVEZNA NA $[x_j, x_{j+1}]$ IN
ODVEDLJIVA NA (x_j, x_{j+1}) , OBSTAJA
 $x_j^1 \in (x_j, x_{j+1})$, DA VELJA $f'(x_j^1) = 0$.

- IMAMO: $x_0^1 < x_1^1 < \dots < x_{n-1}^1$, ZA KATERE JE
 $f'(x_0^1) = f'(x_1^1) = \dots = f'(x_{n-1}^1) = 0$.

KER JE f' ZVEZNA NA $[x_j^1, x_{j+1}^1]$ IN
ODVEDLJIVA NA (x_j^1, x_{j+1}^1) , OBSTAJA
 $x_j^2 \in (x_j^1, x_{j+1}^1)$, DA VELJA $f''(x_j^2) = 0$.

TA KORAK
PONAVLJAMO

- IMAMO: $x_0^{n-1} < x_1^{n-1}$, ZA KATERA VELJA $f_{(x_0^{n-1})}^{(n-1)} = f_{(x_1^{n-1})}^{(n-1)} = 0$.
 FUNKCIJA $f^{(n-1)}$ JE ZVEZNA NA $[x_0^{n-1}, x_1^{n-1}]$, OBSTAJA
 PA TUDI ODVOD NA (x_0^{n-1}, x_1^{n-1}) , ZA KATEREGA NI
 NUJNO, DA JE ZVEZEJ. VSEENO JE TO DOVOLJ ZA
 ROLLOV IZREK IN OBSTOJ $x_0^n \in (x_0^{n-1}, x_1^{n-1}) \subset (a, b)$,
 ZA KATEREGA JE $f^{(n)}(x_0^n) = 0$.

L'HOSPITALOVO PRAVILO:

NAJ BOSTA f IN g ODVEDLJIVI V OKOLICI TOČKE x_0
 (RAZEN MORDA V x_0) IN NAJ GREŠTA HURATI
 PROTI 0 ALI $\pm \infty$, KO GRE $x \rightarrow x_0$.

ČE OBSTAJA LIMITA $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, OBSTAJA TUDI
 LIMITA $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ IN STA ENAKI.

PRIMER UPORABE:

TIP $\frac{0}{0}$ t.j. $\sin x \rightarrow 0$ IN $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

oznaka, da vemo, da smo
UPORABILI PRAVILO

KER OBSTAJA LIMITA NA SKRAJNI DESNI, OBSTAJA
 TUDI LIMITA NA SKRAJNI LEVI.

DO DATEK:

PRAVILO DRŽI TUDI ZA ENOSTRANSKE
 LIMITE IN LIMITE V NESKONČNOSTI
 (t.j. ZA $x_0 = \pm \infty$).

NALOŽBA: IZRAČUNAJ LIMITE:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sin \pi x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(1 - e^{-x^2})}$$

$$(d) \lim_{x \downarrow 0} x^x$$

REŠITEV:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sin \pi x} \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}}{\pi \cos \pi x} = \frac{-3}{4\pi}$$

TIP $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^x - 1 + x e^x} \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2e^x + x e^x} = \frac{1}{2}$$

TIP $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(1 - e^{-x^2})} \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x}}{\frac{2x e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{(e^{x^2} - 1)}{(2 \cdot (1 - \cos x))}$$

TIP $\frac{-\infty}{-\infty}$

$$\stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^{x^2}}{2 \sin x} = 1$$

TIP $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \downarrow 0} x^x \stackrel{\text{TRIK}}{=} \lim_{x \downarrow 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x \downarrow 0} e^{x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \downarrow 0} x \cdot \ln x}$$

IZRAČUNA JMO POSEBEJ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} x \cdot \ln x & \stackrel{\text{TIP } 0 \cdot (-\infty) \text{ NI ZA L.P.}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ & \stackrel{\text{TIP } \frac{-\infty}{\infty} \checkmark}{=} \lim_{x \downarrow 0} (-x) = 0 \end{aligned}$$

MORALA: { NIČLA OD x^α , $\alpha > 0$, JE VEDNO 'MOŽNEJŠA' KOT LOGARITEMSKI PDL. }

SKLEP: $\lim_{x \downarrow 0} x^x = e^0 = 1$

t.j. V LIMITI PREVLADE x^0 IN NE 0^x .