

MATEMATIKA 1

2. obvezna domača naloga

Rokopis rešenih nalog oddajte asistentu na vajah ali ga pustite za asistenta pri receptorki na Jadranski 21, najkasneje do srede, 25. januarja 2017. Na izdelke ne pozabite napisati imena, priimka in vpisne številke. Oddana domača naloga je pogoj za pristop k drugemu kolokviju.

(1) Izračunaj naslednje limite:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)\sqrt{n}}{(2\sqrt{n}+1)(n-2)},$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{n+4},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + n^2}{2^{-n} - 3^{n+1}},$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2-2n} \right)^{2n-1},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-n} \right),$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n^2-1}{2n^3+n+3} \right)^{n^2+7}.$$

(2) Dano je zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{\sqrt{n^3+1} - an^2 - n}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{4n^3-2n}}.$$

Poišči vse vrednosti parametra a , za katere zaporedje konvergira, in v primerih, ko je zaporedje konvergentno, izračunaj še njegovo limito.

(3) Dana je vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

S pomočjo razcepa na parcialne ulomke poišči formulo za k -to delno vsoto vrste in nato izračunaj vsoto vrste.

(4) Razišči konvergenco naslednjih vrst:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}n^n(n^2+1)}{2^{2n+1}n!},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3},$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+3} \right)^{n+1},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3},$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+3} \right)^{n+1}.$$

(5) Obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco naslednjih vrst:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{\ln(2^{n^2})},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2}.$$

(6) Koliko členov vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ je potrebno sešteti, da bo napaka pri oceni vsote vrste manjša od $1/100$?

(7) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & ; x < 0, \\ x^2 - 4x + 2 & ; 0 \leq x \leq 1, \\ \sin(\pi x) - 1 & ; x > 1. \end{cases}$$

Skiciraj njen graf. Ali je injektivna, surjektivna? Katera je največja vrednost, ki jo funkcija zavzame? Kaj pa najmanjša?

(8) Poišči tisti kvadratni polinom z realnimi koeficienti, ki ima vodilni koeficient enak 1 in ima (kompleksno) ničlo $1 - i$.

(9) Poišči tisto kvadratno funkcijo, ki ima teme v točki $(1, 2)$, njen graf pa vsebuje točko $(0, 1)$.

(10) Pokaži, da za vse $x \in [-1, 0]$ velja zveza $\arccos(x) + \arcsin(\sqrt{1 - x^2}) = \pi$.

(11) Izračunaj limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 3x + 2},$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{4}{x^2 + 2x - 3} \right).$

(12) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + 2x|}{x} & ; x < 0, \\ ax + b & ; 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x) & ; x > 1. \end{cases}$$

Določi taki konstanti $a, b \in \mathbb{R}$, da bo funkcija f zvezna.