

MATEMATIKA 1

1. domača naloga - REŠITVE

- (1) Naredimo običajen postopek dokazovanja z indukcijo. Pri tem upoštevamo, da je $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$.
- (2) Naredimo običajen postopek dokazovanja z indukcijo. Pri tem upoštevamo, da je število $3^{2n+1} + 4^{5n+1}$ deljivo s 7 natanko tedaj, ko je $3^{2n+1} + 4^{5n+1} = 7k$ za nek k .
- (3) (a) Najmanjši element množice dobimo za $n = 1$, torej je minimum in tudi infimum enak 0. Zapišemo lahko $\frac{n^2-n}{n^2+3n} = 1 - \frac{4n}{n^2+3n}$ in opazimo, da je za velike n ta izraz poljubno blizu števila 1, vendar tega nikoli ne doseže. To nam pove, da je supremum enak 1, maksimum pa ne obstaja.
- (b) Ker je $1 + 4x - 2x^2 = -2(x-1)^2 + 3$ kvadratna parabola s temenom v točki $(1, 3)$, lahko sklepamo, da sta maksimum in supremum enaka 3, minimum ne obstaja, infimum pa je enak $1 + 4(-2) - 2(-2)^2 = -17$.
- (4) (a) Kritični točki sta -1 in 2, zato razdelimo problem na 3 dele. Rešitev: $x < \frac{2}{3}$.
- (b) Najprej rešimo notranjo absolutno vrednost. Kritična točka je 1. Rešitev: $-4 \leq x \leq 6$.
- (5) Delimo tako, da pomnožimo s konjugiranim kompleksnim številom. Rešitev: $z = 4 - 5i$ in $|z| = 41$.
- (6) (a) Zapišemo $z = x + yi$ in dobimo rešitve $z = x + 2i$ za vsa realna števila x .
- (b) Zapišemo $z = x + yi$ in dobimo rešitve $z = x + xi$ za vsa realna števila x .
- (c) Uporabimo polarni zapis in dobimo $w = |w|(\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k))$, pri čemer je $|w| = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$ in $\varphi_3 = \frac{3\pi}{2}$. Torej je $w_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $w_2 = 1 - i\sqrt{3}$ in $w_3 = -2i$.
- (d) Označimo $w = z+1$ in opazimo, da dobimo zgornjo enačbo. Na koncu še izrazimo $z = w - 1$.
- (7) Predpis je $f(z) = \frac{iz}{2}$ in $f(1+i) = \frac{i-1}{2}$.

- (8) Zaporedje je naraščajoče, navzgor omejeno z 1. Limita je enaka 1, prvi člen, ki se od limite razlikuje za manj kot $1/50$, je a_9 .
- (9) Z indukcijo pokažemo, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno z 0. Zato je po izreku konvergentno, za njegovo limito L pa velja enačba $L = 2^L - 1$, ki ima rešitvi $L = 0$ in $L = 1$. Limita je torej enaka 0. Če je $a_1 = 3$, zaporedje narašča prek vseh meja in je zato divergentno.