

MATEMATIKA 1

1. obvezna domača naloga

Rokopis rešenih nalog oddajte asistentu na vajah ali ga pustite za asistenta pri receptorki na Jadranski 21, najkasneje do ponedeljka, 28. novembra 2016. Na izdelke ne pozabite napisati imena, priimka in vpisne številke. Oddana domača naloga je pogoj za pristop k prvemu kolokviju.

- (1) Pokaži, da za vsako naravno število n velja

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

- (2) Pokaži, da je za vsako naravno število n število $3^{2n+1} + 4^{5n+1}$ deljivo s 7.

- (3) Poišči minimum, maksimum, infimum in supremum naslednjih množic

(a) $A = \left\{ \frac{n^2-n}{n^2+3n}; n \in \mathbb{N} \right\},$

(b) $B = \{1 + 4x - 2x^2; x \in (-2, 1]\}.$

- (4) V množici realnih števil reši neenačbi

(a) $|x - 2| - |x + 1| > x - 1,$

(b) $|2 - |1 - x|| \leq 3.$

- (5) Kompleksno število $z = \frac{9-i}{1+i}$ zapiši v obliki $x + iy$ za neka $x, y \in \mathbb{R}$ in izračunaj $|z|$.

- (6) V množici kompleksnih števil reši enačbe

(a) $z - \bar{z} = 2i,$

(b) $\operatorname{Re}(z) + iz = i\operatorname{Im}(z),$

(c) $w^3 = 8i,$

(d) $\frac{8i}{(z+i)^3} = 1.$

- (7) V kompleksni ravnini nariši množici

(a) $A = \{z \in \mathbb{C}; 1 \leq |z| < 4, 0 \leq \arg(z) < \pi/2\},$

(b) $B = \{z \in \mathbb{C}; \frac{1}{2} \leq |z| < 2, \pi/2 \leq \arg(z) < \pi\}.$

Poišči še predpis, ki množico A preslika na množico B . Kam se s tem predpisom slika kompleksno število $1 + i$?

- (8) Podano je zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom $a_n = \frac{2^n-4}{2^n+4}$. Preveri, da je zaporedje monotono in omejeno ter izračunaj njegovo limito. Kateri je prvi člen, ki se od limite razlikuje za manj kot $\frac{1}{50}$?

- (9) Zaporedje $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je podano z rekurzivno zvezo $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$ in začetnim členom $a_1 = -3$. Pokaži, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno. Od tod sklepaj, da je konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa, če vzamemo za prvi člen zaporedja $a_1 = 3$? (Nasvet: pri iskanju obeh rešitev enačbe $2^x - 1 = x$ si lahko pomagaš s skico.)