Lastne vrednosti - 1. del

1. Lastni problem

Za dano kvadratno matriko iščemo čimpreprostejšo matriko (npr. diagonalno ali zgornje trikotno matriko), ki ji je podobna.

Vemo, da pri tem zelo pomaga, če ima matrika invarianten podprostor. Vprašajmo se, kdaj ima matrika enorazsežen invarianten podprostor.

Trditev 1

Za vsako matriko $A \in M_n(F)$ sta ekvivalentni trditvi:

(1) Obstaja enorazsežen podprostor v F^n, ki je invarianten za A.

(2) Obstaja tak skalar $\lambda \in F$ in tak neničeln vektor $v \in F^n$, da velja $Av = \lambda v$.

Dokaz: Če velja (2), potem je očitno $\mathrm{Lin}\{v\}$ enorazsežen invarianten podprostor za A. Torej velja (1).

Če velja (1), potem obstaja tak neničeln vektor $v \in F^n$, da je podprostor $\mathrm{Lin}\{v\}$ invarianten za A. Ker je $Av \in \mathrm{Lin}\{v\}$, obstaja tak skalar $\lambda \in F$, da velja $Av = \lambda v$. Torej velja (2). $\square$

Trditev 1 služi kot motivacija za študij enačbe

$$Av = \lambda v$$

kjer je $A \in M_n(F)$ dana matrika, iščemo pa skalar $\lambda \in F$ in vektor $v \in F^n$. Enačbi $Av = \lambda v$ rečemo **lastni problem** za matriko A. Trivialna rešitev lastnega problema je $v = 0$ in $\lambda =$ karkoli. Ta rešitev za nas ni zanimiva. Če je (λ, v) netrivialna rešitev lastnega problema, potem pravimo, da je λ **lastna vrednost** matrike A, v pa **lastni vektor** matrike A. Bolj natančno:

Definicija lastne vrednosti in lastnega vektorja

Skalar $\lambda \in F$ je **lastna vrednost** matrike $A \in M_n(F)$, če obstaja tak neničeln vektor $v \in F^n$, da velja $Av = \lambda v$. Vsakemu takemu vektorju v pravimo **lastni vektor** matrike A, ki pripada lastni vrednosti λ.

Pozor: Vsak lastni vektor matrike A je po definiciji neničeln vektor.

Posledica: Iz Trditve 1 sledi, da ima matrika A enorazsežen invarianten podprostor natanko tedaj, ko ima kako lastno vrednost.

Pri iskanju lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike A si pomagamo z naslednjo trditvijo:

Trditev 2

Za vsako matriko $A \in M_n(F)$ in vsak skalar $\lambda \in F$ so ekvivalentne naslednje trditve:

(1) λ je lastna vrednost matrike A.

(2) $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

(3) Matrika $A - \lambda I$ ni obrnljiva.

(4) $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dokaz: Enačbo $Av = \lambda v$ lahko zapišemo v obliki $(A - \lambda I)v = 0$. Velja namreč, da je $(A - \lambda I)v = Av - \lambda Iv = Av - \lambda v$. Odtod sledi, da je točka (1) ekvivalentna s točko (2).

Ekvivalentnost točk (2), (3) in (4) sledi iz karakterizacij obrnljivih matrik. Matrika $A - \lambda I$ je namreč obrnljiva natanko tedaj, ko je $\det(A - \lambda I) \neq 0$, in natanko tedaj, ko so stolpci matrike $A - \lambda I$ linearno neodvisni. $\square$

Karakteristični polinom

Prvi korak pri reševanju lastnega problema za matriko A je izračun karakterističnega polinoma za matriko A.

Definicija karakterističnega polinoma

Karakteristični polinom matrike $A \in M_n(F)$ je polinom $p_A(x) = \det(A - xI)$. (I je identična matrika velikosti n.)

S pomočjo karakterističnega polinoma potem izračunamo vse lastne vrednosti matrike. Velja namreč:

Trditev 3

Skalar $\lambda \in F$ je lastna vrednost matrike $A \in M_n(F)$ natanko tedaj, ko je λ ničla karakterističnega polinoma matrike A.

Dokaz: To je ekvivalenca med (1) in (4) v Trditvi 2.

Dogovor: V nadaljevanju se bomo omejili na primer $F = \mathbb{C}$.

Razlog: Osnovni izrek algebre pravi, da ima vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti vsaj eno kompleksno ničlo. Odtod sledi, da ima vsaka kompleksna kvadratna matrika vsaj eno lastno vrednost.

Karakteristični polinom lahko razcepimo na linearne faktorje:

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$$

kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ vse paroma različne lastne vrednosti matrike A. Naravna števila $n_1, \ldots, n_k$ očitno zadoščajo $n_1 + \ldots + n_k = n$. Pravimo jim **algebraične večkratnosti** lastnih vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Bolj natančno:

Definicija algebraične večkratnosti

Če je lastna vrednost λ m-kratna ničla karakterističnega polinoma, potem pravimo, da je njena **algebraična večkratnost** enaka m.

Primer: 1 je lastna vrednost matrike I_2. Njena algebraična večkratnost je 2.

Karakteristični polinom 2×2 matrike

Karakteristični polinom matrike $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ je

$$p_A(x) = \det \begin{bmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{bmatrix} = (a-x)(d-x) - bc =$$

$$= x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - (\mathrm{sled}\, A)x + \det A$$

Opomba: Podobno izpeljemo, da je karakteristični polinom $n \times n$ matrike $A = [a_{i,j}]$ oblike $p_A(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ kjer je

$$c_n = (-1)^n, \quad c_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_i a_{i,i} \quad \text{in} \quad c_0 = \det A$$

Ostali koeficienti so bolj komplicirani, npr.

$$c_{n-2} = (-1)^{n-2} \sum_{i<j} \det \begin{bmatrix} a_{i,i} & a_{i,j} \\ a_{j,i} & a_{j,j} \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom zgornje trikotne matrike

Če je

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

potem je $\det(A - xI) = (-1)^n (x - a_{1,1})(x - a_{2,2}) \dots (x - a_{n,n})$

Dokaz: Determinanta gornjetrikotne matrike je produkt njenih diagonalnih elementov, torej je $\det(A - xI) = (a_{1,1} - x)(a_{2,2} - x) \dots (a_{n,n} - x)$.

Trditev 4

Če sta matriki A in B podobni, potem je $\det(A - xI) = \det(B - xI)$. Torej imata A in B enake lastne vrednosti z enakimi algebraičnimi večkratnostmi.

Dokaz: Če je $A = PBP^{-1}$, potem je $A - xI = P(B - xI)P^{-1}$. Torej je $\det(A - xI) = \det P \det(B - xI) \det P^{-1} = \det P \det P^{-1} \det(B - xI) = \det(PP^{-1}) \det(B - xI) = \det I \det(B - xI) = \det(B - xI)$.

Lastni podprostori

Množica vseh lastnih vektorjev matrike A, ki pripadajo lastni vrednosti λ, je enaka $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$. Ta množica je vedno neskončna, ker je vsak neničeln večkratnik vsakega lastnega vektorja spet lastni vektor.

Vektor 0 ni nikoli lastni vektor. Če ga dodamo k množici lastnih vektorjev, dobimo množico $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, ki je vektorski podprostor v $\mathbb{C}^n$.

Definicija lastnega podprostora in geometrijske večkratnosti

Če je λ lastna vrednost matrike A, potem vektorskemu podprostoru $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ pravimo **lastni podprostor** matrike A za lastno vrednost λ, njegovi dimenziji pa **geometrijska večkratnost** lastne vrednosti λ.

Opomba: Lastne podprostore matrike A poiščemo tako, da za vsako njeno lastno vrednost λ rešimo homogen sistem linearnih enačb $(A - \lambda I)v = 0$, kjer smatramo, da so komponente vektorja v spremenljivke.

Primer

Določi vse lastne vrednosti in lastne podprostore matrike $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Karakteristični polinom je $p_A(x) = \det(A - xI) = x^2 + 1$. Ima dve kompleksni ničli $\lambda_1 = i$ in $\lambda_2 = -i$. Lastna podprostora sta

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\}$$

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} = \mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\}$$

Opomba: Ker sta oba lastna podprostora enorazsežna, imata tako λ_1 kot λ_2 geometrijsko večkratnost 1. Poleg tega imata tako λ_1 kot λ_2 algebraično večkratnost enako 1 saj sta obe enostavni ničli $p_A(x)$.

Primer

Določi vse lastne vrednosti in lastne podprostore matrik

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Vse tri matrike imajo enak karakteristični polinom, namreč

$$(2-x)^3 = -(x-2)^3.$$

Torej je pri vseh 2 edina lastna vrednost in ima algebraično večkratnost 3. V prvem primeru je lastni podprostor lastne vrednosti 2 enak

$$\mathrm{Ker}\,(A_1 - 2I) = \mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\} = \mathbb{C}^3$$

torej je geometrijska večkratnost lastne vrednosti 2 enaka 3.

V drugem primeru je lastni podprostor lastne vrednosti 2 enak

$$\mathrm{Ker}\,(A_2 - 2I) = \mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

torej je geometrijska večkratnost lastne vrednosti 2 enaka 2.

V tretjem primeru je lastni podprostor lastne vrednosti 2 enak

$$\mathrm{Ker}\,(A_3 - 2I) = \mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

torej je geometrijska večkratnost lastne vrednosti 2 enaka 1. □

Naj bosta A in B podobni matriki in naj bo λ lastna vrednost za A. Po Trditvi 4 je λ tudi lastna vrednost za B. Poglejmo kakšna je zveza med lastnima podprostoroma $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$ in $\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I)$.

Naj bo P taka obrnljiva matrika, da velja $B = PAP^{-1}$. Potem velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I) &= \mathrm{Ker}\,P(A-\lambda I)P^{-1} \\
&= \{v \in F^n \mid P(A-\lambda I)P^{-1}v = 0\} \\
&= \{v \in F^n \mid (A-\lambda I)P^{-1}v = 0\} \\
&= \{Pw \mid w \in F^n, (A-\lambda I)w = 0\} \\
&= \{Pw \mid w \in \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)\} \\
&= P\,\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)
\end{aligned}$$

Odtod sledi, da podprostora $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I)$ in $\mathrm{Ker}\,(B-\lambda I)$ nista nujno enaka. Sta pa enaki njuni dimenziji.

Velja namreč

$$\dim \operatorname{Ker}(B-\lambda I) = \mathrm{n}(B-\lambda I) = \mathrm{n}(P(A-\lambda I)P^{-1}) =$$

$$= \mathrm{n}(P(A-\lambda I)) = \mathrm{n}(A-\lambda I) = \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda I)$$

ker se ničnost ohranja pri vrstični in stolpčni ekvivalenci matrik.

Dokazali smo torej, da imata podobni matriki enake geometrijske večkratnosti lastnih vrednosti. Natančneje:

Trditev 5

Naj bosta A in B podobni matriki in naj bo λ lastna vrednost za A z geometrijsko večratnost m. Potem je λ tudi lastna vrednost za B z geometrijsko večkratnostjo m.

Opomba: Ker so pri diagonalni matriki geometrijske večkratnosti lastnih vrednosti enake algebraičnim večkratnostim, je to res tudi za vse matrike, ki so podobne diagonalnim. Odtod sledi, da matriki A_2 in A_3 iz zadnjega primera nista podobni diagonalnim matrikam.

Diagonalizacija matrik

S pomočjo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike A lahko včasih poiščemo diagonalno matriko, ki je podobna matriki A.

Recimo, da ima matrika A n linearno neodvisnih vektorjev $v_1, \ldots, v_n$ in naj bodo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pripadajoče lastne vrednosti, se pravi

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \ldots, Av_n = \lambda_n v_n$$

Odtod sledi, da je matrika

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$$

obrnljiva in velja

$$AP = \begin{bmatrix} Av_1 & \ldots & Av_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \ldots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} = PD$$

kjer je

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Primer

Poišči diagonalno matriko, ki je podobna matriki $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rešitev: Ker sta lastna vektorja

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

matrike A linearno neodvisna, vzamemo

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Ker sta njuni lastni vrednosti $\lambda_1 = i$ in $\lambda_2 = -i$, vzamemo

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Po gornjem računu je $A = PDP^{-1}$.

2. Schurov izrek

Vemo, da ni vsaka kvadratna matrika nad $\mathbb{C}$ podobna kaki diagonalni matriki. Pokažimo pa, da je vedno podobna kaki zgornje trikotni matriki. Kasneje se bo izkazalo, da je podobna zelo posebni zgornje trikotni matriki (Jordanski kanonični formi).

Schurov izrek

Vsaka kvadratna matrika nad $\mathbb{C}$ je podobna kaki zgornje trikotni matriki.

Dokaz bo z popolno indukcijo po velikosti matrike. Očitno trditev velja za matrike velikosti 1, ker so te že same zgornje trikotne. Recimo sedaj, da trditev velja za vse matrike velikosti $n-1$ in vzemimo poljubno matriko A velikosti n. Radi bi dokazali, da trditev velja tudi za matriko A.

Naj bo λ lastna vrednost matrike A in naj bo v_1 pripadajoči lastni vektor. Naj bodo $v_2, \ldots, v_n$ dopolnitev v_1 do baze za F^n. Potem je matrika

$$P = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \ldots & v_n \end{array} \right]$$

obrnljiva. Razvijmo vektorje $Av_2, \ldots, Av_n$ po bazi $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

$$Av_2 = \alpha_{2,1} v_1 + \alpha_{2,2} v_2 + \ldots + \alpha_{2,n} v_n$$

$$\vdots$$

$$Av_n = \alpha_{n,1} v_1 + \alpha_{n,2} v_2 + \ldots + \alpha_{n,n} v_n$$

Potem velja

$$AP = A \left[\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} Av_1 & Av_2 & \ldots & Av_n \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} \lambda v_1 & \alpha_{2,1} v_1 + \alpha_{2,2} v_2 + \ldots + \alpha_{2,n} v_n & \ldots & \alpha_{n,1} v_1 + \alpha_{n,2} v_2 + \ldots + \alpha_{n,n} v_n \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} \lambda & \alpha_{2,1} & \ldots & \alpha_{n,1} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{2,n} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{array} \right] = P \left[\begin{array}{cc} \lambda & c \\ 0 & B \end{array} \right]$$

Po indukcijski predpostavki obstaja taka obrnljiva matrika Q velikosti $n-1$ in taka zgornje trikotna matrika T velikosti $n-1$, da velja

$$B = QTQ^{-1}$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & c \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & c \\ 0 & Q^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & cQ \\ 0 & Q^{-1}BQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & cQ \\ 0 & T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

kar je zgornje trikotna matrika. S tem je indukcijski korak dokazan. $\square$

Primer

Poišči kako zgornje trikotno matriko, ki je podobna matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Karakteristični polinom matrike A je

$$\det(A - xI) = (3-x)(-1-x) + 4 = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$$

torej je 1 lastna vrednost matrike A. Pripadajoči lastni vektor je v jedru matrike $A - I$. Vzemimo recimo

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dopolnimo ta vektor do baze za $\mathbb{C}^2$ z vektorjem

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Označimo

$$P = \left[\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right]$$

Potem velja

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

Torej je matrika A podobna zgornje trikotni matriki

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$