Naloga: Naj bosta $x, y \in \mathbb{R}^n$ in $M = xy^T$. $(x, y \neq 0)$

Izračunajte $\|M\|_\infty$, $\|M\|_1$, $\|M\|_F$ in $\|M\|_2$.

Rešitev: $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$

$$M = xy^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1, \dots, y_n] = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

$$= (m_{ij})_{i,j=1}^n ; \quad m_{ij} = x_i y_j .$$

$$\|M\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^n |x_i y_j|$$

$$= \max_i \left(|x_i| \sum_{j=1}^n |y_j| \right) = \max_i \left(|x_i| \, \|y\|_1 \right)$$

$$= \|y\|_1 \max_i |x_i| = \|y\|_1 \|x\|_\infty$$

$$\|M\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}| = \dots = \|x\|_1 \|y\|_\infty$$

$$\|M\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n m_{ij}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \left(x_i^2 \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right) \right) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \|y\|_2^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|y\|_2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} = \|x\|_2 \|y\|_2$$

$$\|M\|_2^2 = \lambda_{max}(M^T M)$$

$$M^T M = (x y^T)^T (x y^T) = (y x^T)(x y^T)$$

$$= y (x^T x) y^T = \|x\|_2^2 \, y y^T$$

$$(M^T M) y = \left(\|x\|_2^2 \, y y^T \right) y = \|x\|_2^2 \, y (y^T y)$$

$$= \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 \, y \Rightarrow y \text{ je lastni vektor}$$

$M^T M$ z l. vrednostjo $\|x\|_2^2 \|y\|_2^2$.

Vemo $\|M\|_2 \geq \|x\|_2 \|y\|_2$.

Katere pa so ostale lastne vrednosti $M^T M$?

Doma: Vse ostale l. vrednosti so 0!

Sledi, da je $\|x\|_2^2 \|y\|_2^2$ največja l. vrednost $M^T M$, torej je $\|M\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2 \|y\|_2^2} = \|x\|_2 \|y\|_2$.

Obratno vstavljanje: $Ux = b$,

U zgornja trikotna.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & & u_{2n} \\ \vdots & & & & \\ & & & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & \dots & & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Št. op. $O(n^2)$.