

LINEARNA ALGEBRA 2020/21
18. VAJE: 3. 3. 2021

1. Določi rang linearnima preslikavama $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ in $\vec{x} \mapsto (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b}$ v odvisnosti od $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.
2. Pokaži, da ima enačba $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ za $\vec{a} \neq 0$ natanko eno rešitev.
3. Poišči bazo jedra in bazo slike preslikave $A: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ podane z

$$A(p(x)) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x).$$

4. Naj bo matrika A podobna B . Pokaži, da je za vsak polinom p matrika $p(A)$ podobna $p(B)$.
5. Naj bo A ~~avtomorfizem~~ ^{endomorfizem}. Pokaži, da je vsota in presek invariantnih podprostorov preslikave A tudi invarianten prostor.
- ~~6.~~ Naj matriki ~~(avtomorfizma)~~ ^(endomorfizma) A in B komutirata. Pokaži, da je $\text{im}(A)$ invarianten za B .
- ~~7.~~ Naj bo $U = V \oplus W$ in P projekciji na V vzdolž W . Pokaži Podprostor V je invarianten za preslikavo A natanko tedaj, ko je $PAP = AP$. Podprostora V in W sta oba invariantna za A natanko tedaj, ko je $AP = PA$.
- ~~8.~~ Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

LINEARNA ALGEBRA, 2020/21
18. VAJE: 3. 3. 2021

1. Če je $\vec{a} = 0$, potem je preslikava $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ ničelna, torej ima rang 0.

Če je $\vec{a} \neq 0$, potem $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ v bazi $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{a} \times \vec{c}\}$, kjer je $\vec{a} \perp \vec{c}$ pripada matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Torej ima preslikava rang 2.

Zapišemo $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle \vec{a}$.

Če je $\vec{a} = 0$ ali $\vec{b} = 0$, potem ima preslikava rang 0.

Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ linearno odvisna, potem v enaki bazi kot zgoraj matriki pripada matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \\ 0 & 0 & \lambda \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \end{bmatrix},$$

ki ima rang 2.

Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, potem je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ baza, v kateri preslikavi pripada matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & -\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \end{bmatrix},$$

ki ima rang 1, če sta $\vec{a} \perp \vec{b}$ in 2 sicer.

Drug način reševanja je spodaj.

2. Preslikavi $A: \vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \vec{a} \times \vec{x}$ v bazi $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{a} \times \vec{c}\}$ ($\vec{a} \perp \vec{c}$) pripada matrika

$$\begin{bmatrix} \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ki ima poln rang. Zato je obrnljiva in enačba ima enolično rešitev $A^{-1}\vec{b}$.

4. Naj bo $B = PAP^{-1}$, potem je $B^2 = PA(P^{-1}P)AP^{-1} = PA^2P^{-1}$. Torej sta A^2 in B^2 podobni matriki. Podobno za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $B^k = PA^kP^{-1}$.

Za poljuben polinom dobimo

$$p(B) = \sum_{i=0}^n a_i B^i = \sum_{i=0}^n a_i PA^i P^{-1} = P \left(\sum_{i=0}^n a_i A^i \right) P^{-1} = Pp(A)P^{-1}.$$

6. Za vsak $u \in U$ je $Pu \in V$. Potem je $APu \in V$, ker je V invarianten podporstor A . Torej je $PAPu = APu$ za vsak $u \in U$ ($Pv = v$ za vsak $v \in V$). Torej je $PAP = AP$.

$$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle \cdot b - \langle a, b \rangle \cdot c$$

1. Določi rang linearnima preslikavama $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$ in $\vec{x} \mapsto (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b}$ v odvisnosti od $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

$$A: U \rightarrow V \quad \text{rang } A = \text{rang } [A]_{B \leftarrow C} \quad B, C \text{ bazi } U, V$$

$$A_1 \quad \underline{\vec{a} \neq 0} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \langle a, c \rangle \\ 0 & 0 & -\langle a, a \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} V \text{ bazi} \\ \{a, c, a \times c\} \\ c \perp a \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{c} + 1 \cdot \vec{a} \times \vec{c}$$

$$a \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \langle a, c \rangle \cdot \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{c}$$

$$\text{rang } A_1 = 2 \quad n(A_1) = 1$$

$$\underline{\vec{a} = 0} \quad \text{rang } A_1 = 0$$

$$\underline{A_2 x} = (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b}$$

$$A_2 = B_2 B_1$$

$$B_1 x = \vec{a} \times \vec{x}$$

$$\underline{B_2 x = \vec{x} \times \vec{b}}$$

$$\underline{B_2 B_1} x = (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b}$$

$$\vec{a} = 0 \text{ ali } \vec{b} = 0 \Rightarrow \text{rang } A_2 = 0$$

$$\vec{a} \neq 0 \text{ in } \vec{b} \neq 0$$

lin odvisna

lin neodvisna

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

$$B_2 x = \vec{x} \times \lambda \vec{a} = -\lambda (\vec{a} \times \vec{x}) = -\lambda B_1 x$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \langle a, a \rangle & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad -\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\langle a, a \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\langle a, a \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle a, a \rangle & 0 \\ 0 & 0 & -\langle a, a \rangle \end{bmatrix} = \lambda \langle a, a \rangle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } A_2 = 2$$

$$\underline{a, b \text{ lin neodvisna}} \leadsto \{a, b, a \times b\} \text{ je baza}$$

$$x \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$$

$$x \mapsto -\vec{b} \times \vec{x}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \langle a, b \rangle \\ 0 & 0 & -\langle a, a \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica, ki pripada B_1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\langle b, b \rangle \\ 0 & 0 & \langle b, b \rangle \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica, ki pripada B_2

rešitev, ki pripada $B_2 B_1 = A_2$
 $\uparrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \langle b, s \rangle \\ 0 & 0 & \langle a, b \rangle \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \langle a, s \rangle \\ 0 & 0 & -\langle a, a \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\langle s, s \rangle & 0 \\ 0 & \langle a, s \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle a, s \rangle \end{bmatrix} = \bar{A}_2$$

$$\text{rang } A_2 = \begin{cases} 2; a \not\perp b \\ 1; a \perp b \end{cases}$$

2. Pokaži, da ima enačba $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ za $\vec{a} \neq 0$ natanko eno rešitev.

$\nearrow$ kvadratna
 $Ax = b$

A je obrnjiva

$$Ax = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \vec{a} \times \vec{x}$$

je linearna in obrnjiva.

$a, b, a \times b$
 $a \perp b$

$$\langle (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}), \vec{a} \rangle \vec{a}$$

$$\left(\lambda \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle + \mu \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \right) \vec{a}$$

$$\lambda \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \mu \langle \vec{y}, \vec{a} \rangle \vec{a} = \lambda Ax + \mu Ay$$

A obrnjiva $\Rightarrow$ pokazati bomo, da je rešitev pri danih vektoreh obrnjiva.

$$\underline{[A+B]_C} = \underline{[A]_C} + \underline{[B]_C} \quad (A_1 + A_2)x = A_1x + A_2x = Ax$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$\begin{aligned} A_1x &= \langle x, \vec{a} \rangle \vec{a} \\ A_2x &= \vec{a} \times \vec{x} \end{aligned}$$

$$[A_1]_C$$

$$A_1\vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \vec{a}$$

$$A_1\vec{b} = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{a} = 0$$

$$A_1\vec{a} \times \vec{b} = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{a} = 0$$

$$[A_1]_C = \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_2]_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\langle a, a \rangle \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A]_C = \begin{bmatrix} \langle a, a \rangle & & \\ & -\langle a, a \rangle & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]_C \text{ je invertibilna}$$

$$\det[A]_C = \langle a, a \rangle^2 \neq 0$$

3. Poišči bazo jedra in bazo slike preslikave $A: \mathbb{R}[x]_n \rightarrow \mathbb{R}[x]_n$ podane z

$$A(p(x)) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x).$$

$$\{1, x, \dots, x^n\}$$

$$A_1 p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$A_2 p(x) = -p(x)$$

$$-I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Jedro

$$Ax=0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešitev

$$\pm \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

baza jedra

je

$$\{1+x\}$$

$n=1$

Slika

lin

$\{ \text{stolpci} \}$

$= \text{lin}$

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$\{ \}$

$$= \text{lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

baza

$$\{-1+x\}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

jadro

parametrická
řešitel

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow [1 \ 0 \ -1 \ | \ 0] \rightarrow t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

baza jadra $\{1+x^2, x\}$

baza slike $\{1-x^2\}$

$$\dim \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & & 1 \\ & -1 & 1 \\ & 1 & -1 \\ 1 & & -1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Baza jadra

$\{1+x^3, x+x^2\}$

Baza slike

$\{-1+x^3, -x+x^2\}$

$$\dim \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$n=3$

$$n = 2m$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & & & & 1 \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & \\ 1 & & & & -1 \end{bmatrix}$$

(n+1 - lko)

$n+1 \times n+1$
matrica

baza jadra

$$\{ \underline{x^i + x^{2m-i}} \mid i=0, \dots, m \}$$

baza slike

$$\{ \underline{-x^i + x^{2m-i}} \mid i=0, \dots, m-1 \}$$

$i=m$

$$n = 2m+1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & 1 \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ 1 & & & & -1 \end{bmatrix}$$

$m+1$
 $2m+2$

baza jadra

$$\{ x^i + x^{2m+1-i} \mid i=0, \dots, m+1 \}$$

baza slike

$$\{ -x^i + x^{2m+1-i} \mid i=0, \dots, m+1 \}$$

4. Naj bo matrika A podobna B . Pokaži, da je za vsak polinom p matrika $p(A)$ podobna $p(B)$.

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$
 $(\mathbb{C})$ sta si podobni, če obstaja obrnljiva
 matrika P $A = PBP^{-1}$
 $B = P^{-1}AP$

A, B sta si podobni $(\Leftrightarrow) \exists \mathcal{A}: U \rightarrow U$ in
 bazis B_1, B_2
 $A = [\mathcal{A}]_{B_1}$ $B = [\mathcal{A}]_{B_2}$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}: U \rightarrow U$ lahko se zgodi, da obstajata bazis B_1, B_2
 $[\mathcal{A}]_{B_1} = [\mathcal{B}]_{B_2}$

$p \in \mathbb{R}[x]$ ali $\mathbb{C}[x]$ $p = \sum_{j=0}^n a_j x^j$

$p(A) = \sum_{j=0}^n a_j A^j$ ($A^0 = I$)

A je podobna B , potem je $p(A)$ podobna $p(B)$

$B = PAP^{-1}$ iščemo Q (obrnljiva) $p(B) = Qp(A)Q^{-1}$

$Q = P$

$p(B) = p(PAP^{-1}) = \sum_{j=0}^n a_j (PAP^{-1})^j = \textcircled{*}$

$$(PAP^{-1})^j = PA^jP^{-1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \sum_{j=0}^n q_j PA^jP^{-1} = \\ &= P\left(\sum_{j=0}^n q_j A^j\right)P^{-1} = \underline{P_P(A)P^{-1}} \end{aligned}$$

5. Naj bo A ~~automorfizem~~ ^{endomorfizem (kvadratna matrika)}. Pokaži, da je vsota in presek invariantnih podprostorov preslikave A tudi invarianten prostor.

$A: U \rightarrow U$ invarianten podprostor V endomorfizem A

$$AV \subseteq V$$

//

$$\{Av \mid v \in V\}$$

V_1, V_2 invariantni podprostor $V_1 + V_2$ $V_1 \cap V_2$ sta invariantna

$$A(V_1 + V_2) \subseteq V_1 + V_2$$

če je $x \in V_1 + V_2$, potem je $Ax \in V_1 + V_2$.

$$Ax = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ V_1 & V_2 \end{matrix}$$

$$x = \overset{\in V_1}{v_1} + \overset{\in V_2}{v_2}$$

$$Ax = A(v_1 + v_2) = \overset{V_1}{Av_1} + \overset{V_2 \text{ (ker sta } V_1 \text{ in } V_2 \text{ invariantna)}}{Av_2} \in V_1 + V_2$$

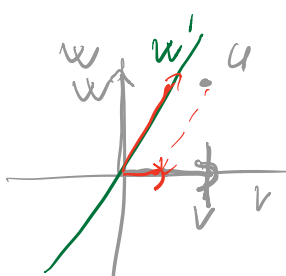
$$\begin{matrix} x \in V_1 \cap V_2 \\ \updownarrow \\ \underline{x \in V_1 \text{ in } x \in V_2} \end{matrix}$$

$$Ax \in V_1 \cap V_2 \quad (Ax \in V_1 \text{ in } Ax \in V_2)$$

$$\underline{Ax \in V_1 \text{ in } Ax \in V_2}$$

7. Naj bo $U = V \oplus W$ in P projekciji na V vzdolž W . Pokaži Podprostor V je invarianten za preslikavo A natanko tedaj, ko je $PAP = AP$. Podprostora V in W sta oba invariantna za A natanko tedaj, ko je $AP = PA$.

$P: U \rightarrow U$ $U = V \oplus W$ $\forall u \in U$
 $u = v + w$ - enolično $Pu = v$
 $P^2 = P$



$$\begin{aligned}
 Pu &= P(v+w) = v \\
 Pv &= P(v+0) = v \\
 P^2u &= Pv = v
 \end{aligned}$$

$P^2 = P \Rightarrow P$ je projekcija

V invarianten za preslikavo $A \Leftrightarrow PAP = AP$

$\Rightarrow$ ker je V invarianten

$\forall v \in V \quad Av \in V \quad \forall u \in U$ je $Pu \in V$

$APu \in V$

$PAPu = APu$

ker je $Pv = v$ za vsak $v \in V$.

$\Leftarrow$ naslednjič