

Lastne vrednosti - 2. del

3. Obstoj diagonalizacije

Še vedno delamo s kvadratnimi matrikami, ki imajo kompleksne elemente.

Definicija diagonalizacije

Diagonalizacija matrike A je razcep $A = PDP^{-1}$, kjer je P obrnljiva matrika, D pa diagonalna matrika.

Naj bodo $v_1, \dots, v_n$ stolpci matrike P , $d_1, \dots, d_n$ pa diagonalni elementi matrike D . Očitno velja $AP = [Av_1 \dots Av_n]$ in $PD = [d_1 v_1 \dots d_n v_n]$. Torej velja $AP = PD$ natanko tedaj, ko je $Av_i = d_i v_i$ za vsak $i = 1, \dots, n$.

Matrika P je obrnljiva natanko tedaj, ko so $v_1, \dots, v_n$ linearno neodvisni.

Povzetek:

- Diagonalni elementi matrike D so ravno lastne vrednosti matrike A .
- Stolpci matrike P so linearno neodvisni lastni vektorji matrike A .
- Matrika A ima diagonalizacijo natanko tedaj, ko ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Primer matrike, ki ima diagonalizacijo

Poiščimo diagonalizacijo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Najprej izračunamo karakteristični polinom

$$p_A(x) = \det(A - xI) = 2 - 5x + 4x^2 - x^3 = -(x - 1)^2(x - 2)$$

Lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti 1 je

$$\text{Ker}(A - I) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \text{Lin} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Lastni podprostor, ki pripada lastni vrednosti 2 je

$$\text{Ker}(A - 2I) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Za matriki

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

torej velja

$$AP = A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & Av_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 2v_3 \end{bmatrix} = PD$$

odkoder sledi

$$A = PDP^{-1}$$

Primer matrike, ki nima diagonalizacije

Pokažimo, da matrika $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nima diagonalizacije.

Prvi način: Poskusimo najti tako obrnljivo matriko $P = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ in tako

diagonalno matriko $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$, da velja $AP = PD$. Primerjava

istoležnih elementov nam da $u = d_1x$, $v = d_2y$, $0 = d_1u$, $0 = d_2u$. Če prvo enačbo pomnožimo z u in upoštevamo tretjo, dobimo $u^2 = 0$. Če drugo enačbo pomnožimo z v in upoštevamo četrto, dobimo $v^2 = 0$. Matrika P torej ima ničelno vrstico, kar je v nasprotju z obrnljivostjo.

Drugi način: Izračunajmo lastne vrednosti in lastne vektorje.

Karakteristični polinom je x^2 , torej je 0 edina lastna vrednost. Pripadajoči lastni podprostor $\text{Ker}A = \text{Lin}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ je enodimenzionalen, torej matrika A nima dveh linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Primer uporabe: S pomočjo diagonalizacije je preprosto izračunati potenco matrike, kar pride prav pri reševanju sistemov diferenčnih enačb. Velja

$$A^n = AA \cdots A = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PDD \cdots DP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

kjer D^n izračunamo tako, da potenciramo vse diagonalne elemente.

Odtod sledi, da za vsak polinom (ali konvergentno potenčno vrsto)

$f(x) = \sum_i c_i x^i$ velja

$$f(A) = \sum_i c_i A^i = \sum_i c_i P D^i P^{-1} = P \left(\sum_i c_i D^i \right) P^{-1} = P f(D) P^{-1}$$

kjer $f(D)$ izračunamo tako, da uporabimo f na vseh diagonalnih elementih. To nam pride prav reševanju sistemov linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti, kjer moramo izračunati $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

V nadaljevanju se bomo večkrat sklicevali na naslednjo trditev.

Trditev 1

Naslednje lastnosti matrike A so ekvivalentne

- Matrika A ima diagonalizacijo.
- Matrika A je podobna diagonalni matriki.
- Matrika A ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.
- Vsota lastnih podprostorov matrike A je enaka $\mathbb{C}^n$.

Dokaz: Iz definicij sledi, da sta prva in druga lastnost ekvivalentni. Dokazali smo že, da sta druga in tretja lastnost ekvivalentni. Tretja in četrta trditev obe pravita, da so lastni vektorji A ogrodje za $\mathbb{C}^n$.

Naslednja trditev je bolj tehnične narave, ampak ima zanimive posledice.

Trditev 2

Lastni vektorji, ki pripadajo paroma različnim lastnim vrednostim, so linearno neodvisni.

Dokaz. Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paroma različne lastne vrednosti matrike A in naj bodo $v_1, \dots, v_k$ pripadajoči lastni vektorji. Se pravi

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad \dots \quad Av_k = \lambda_k v_k \quad (1)$$

in $v_1, \dots, v_k$ so neničelni vektorji. Z indukcijo po j bomo pokazali, da je za vsak $j \leq k$ množica $\{v_1, \dots, v_j\}$ linearno neodvisna.

Baza indukcije: Ker je $v_1 \neq 0$, je množica $\{v_1\}$ linearno neodvisna.

Indukcijski korak: Recimo, da je množica $\{v_1, \dots, v_j\}$ linearno neodvisna, kjer je $j < k$. Radi bi pokazali, da je potem tudi množica $\{v_1, \dots, v_{j+1}\}$ linearno neodvisna. Recimo, da je

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} = 0. \quad (2)$$

Če (2) pomnožimo z leve z matriko A in upoštevamo (1), dobimo

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_j \lambda_j v_j + \alpha_{j+1} \lambda_{j+1} v_{j+1} = 0. \quad (3)$$

Če od enačbe (3) odštejemo z λ_{j+1} pomnoženo enačbo (2), dobimo

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{j+1}) v_1 + \dots + \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{j+1}) v_j = 0. \quad (4)$$

Po indukcijski predpostavki odtod sledi, da je

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{j+1}) = 0, \dots, \alpha_j (\lambda_j - \lambda_{j+1}) = 0. \quad (5)$$

Ker so $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paroma različne, odtod sledi $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_j = 0$. Iz enačbe (2) sedaj sledi, da je $\alpha_{j+1} v_{j+1} = 0$. Odtod sledi $\alpha_{j+1} = 0$, saj je $v_{j+1} \neq 0$. Dokazali smo, da iz (2) sledi $\alpha_1 = \dots = \alpha_{j+1} = 0$, torej so $v_1, \dots, v_{j+1}$ linearno neodvisni. □

Posledica 1

Če je A $n \times n$ matrika, ki ima n paroma različnih lastnih vrednosti, potem ima A diagonalizacijo.

Dokaz: Ker ima A n paroma različnih lastnih vrednosti, ima po Trditvi 2 tudi n linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Odtod po Trditvi 1 sledi, da ima A diagonalizacijo.

Posledica 2

Vsota vseh lastnih podprostorov matrike je direktna.

Dokaz: Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vse paroma različne lastne vrednosti matrike $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pripadajoči lastni podprostori so potem $V_i = \text{Ker}(A - \lambda_i I)$ za $i = 1, \dots, k$. Trdimo, da je vsota podprostorov $V_1, \dots, V_k$ direktna. Treba je dokazati, da so poljubni vektorji $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$, ki zadoščajo $v_1 + \dots + v_k = 0$, enaki nič. To sledi iz Trditve 2.

Primer

Poiščimo diagonalizacijo $n \times n$ matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Naj bo $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ in $v_k = \sum_{j=1}^n \varepsilon^{jk} \mathbf{e}_j$. Potem je

$$Av_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^k \\ \varepsilon^{2k} \\ \varepsilon^{3k} \\ \vdots \\ \varepsilon^{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{2k} \\ \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{4k} \\ \vdots \\ \varepsilon^k \end{bmatrix} = \varepsilon^k \begin{bmatrix} \varepsilon^k \\ \varepsilon^{2k} \\ \varepsilon^{3k} \\ \vdots \\ \varepsilon^{nk} \end{bmatrix} = \varepsilon^k v_k$$

Ker so lastne vrednosti ε^k , $k = 1, \dots, n$, paroma različne, so lastni vektorji v_k , $k = 1, \dots, n$, linearno neodvisni. Torej ima A diagonalizacijo.

Naj bo

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon^n \end{bmatrix}$$

Potem je $AP = PD$, torej je iskana diagonalizacija

$$A = PDP^{-1}$$

Primer

Poiščimo diagonalizacijo $n \times n$ matrike

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Naj bo A matrika iz prejšnjega primera. Opazimo, da velja

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Podobno dobimo $A^3, A^4, \dots$ (Diagonale iz enk se premikajo desno navzgor.). Odtod sledi

$$C = c_0 I + c_1 A + \dots + c_{n-1} A^{n-1}$$

Označimo $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$. Potem je

$$C = p(A) = p(PDP^{-1}) = Pp(D)P^{-1}$$

kjer sta P in D kot v prejšnjem primeru.

Opomba: Matrike z večkratnimi lastnimi vrednostmi včasih imajo diagonalizacijo (npr. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$) včasih pa ne (npr. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).

Izkaže se, da je to povezano z algebraično in geometrijsko večkratnostjo lastnih vrednosti. V prvem primeru sta obe večkratnosti enaki ($a(1) = g(1) = 2$), v drugem pa sta različni ($a(0) = 2$ in $g(0) = 1$).

Lema

Za vsako lastno vrednost λ je njena geometrijska večkratnost $g(\lambda)$ manjša ali enaka njeni algebraični večkratnosti $a(\lambda)$.

Dokaz: Naj bo $v_1, \dots, v_m$ baza za $\text{Ker}(A - \lambda I)$ in naj bo $v_{m+1}, \dots, v_n$ njena dopolnitev do baze $\mathcal{B}$ za $\mathbb{C}^n$. Običajen račun potem pokaže, da je

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda I_m & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

kjer je $P = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_m & v_{m+1} & \dots & v_n \end{bmatrix}$ obrnljiva matrika. Sledi

$$\det(A - xI_n) = \det(\lambda I_m - xI_m) \det(C - xI_{n-m}) = (\lambda - x)^m \det(C - xI_{n-m})$$

$\text{Ker}(x - \lambda)^m$ deli karakteristični polinom, je $a(\lambda) \geq m = g(\lambda)$.

Trditev 3

Matrika A ima diagonalizacijo natanko tedaj, ko se za vsako lastno vrednost A njena geometrijska in algebraična večkratnost ujemata.

Dokaz: Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vse paroma različne lastne vrednosti matrike A . Njen karakteristični polinom je $p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_k)^{n_k}$, kjer je n_i algebraična večkratnost za λ_i . Očitno je $n_1 + \dots + n_k = n$. Geometrijska večkratnost za λ_i je $m_i := \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$.

Po Trditvi 1 ima matrika A diagonalizacijo natanko tedaj ko je $U = \mathbb{C}^n$, kjer je U vsota vseh lastnih podprostorov matrike A . Po Posledici 2 je $\dim U = m_1 + \dots + m_k$. Torej ima matrika A diagonalizacijo natanko tedaj, ko je $m_1 + \dots + m_k = n_1 + \dots + n_k$. Ker je $m_i \leq n_i$ za vsak i (Lema), to velja natanko tedaj, ko je $m_i = n_i$ za vsak i . □

Trditev 4

Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ vse paroma različne lastne vrednosti matrike A . Potem ima matrika A diagonalizacijo natakó tedaj, ko je produkt matrik $A - \lambda_1 I, \dots, A - \lambda_k I$ enak ničelni matriki.

Dokaz. Označimo $L_i = A - \lambda_i I$ za $i = 1, \dots, k$. Potrebovali bomo formulo

$$\dim \operatorname{Ker}(L_1 L_2 \cdots L_k) \leq \dim \operatorname{Ker}(L_1) + \dim \operatorname{Ker}(L_2) + \dots + \dim \operatorname{Ker}(L_k). \quad (1)$$

Primer $k = 2$ formule (1) smo dokazali v prejšnjem poglavju. Za splošen k formulo (1) dokažemo z indukcijo.

Če velja $L_1 \cdots L_k = 0$, potem je $\operatorname{Ker}(L_1 \cdots L_k) = \mathbb{C}^n$, kjer je n velikost matrike A , torej je $\dim \operatorname{Ker}(L_1 \cdots L_k) = n$. Označimo z $m_i = \dim \operatorname{Ker}(L_i)$ geometrijsko večkratnost λ_i . Iz formule (1) torej sledi $n \leq m_1 + \dots + m_k$. Naj bo n_i algebraična večkratnost λ_i . Iz $n = n_1 + \dots + n_k$ in iz $m_i \leq n_i$ sledi, da je $m_i = n_i$ za vsak i . Po Trditvi 3 ima torej matrika A diagonalizacijo.

Dokažimo še drugo smer. Recimo, da ima matrika A diagonalizacijo $A = PDP^{-1}$. S permutacijo diagonalnih elementov matrike D dobimo matriko, ki ji je podobna. Zato lahko predpostavimo, da enake lastne vrednosti ležijo skupaj na diagonalni D , se pravi, da je

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Iz (2) sledi, da je i -ti diagonalni blok matrike $D - \lambda_i I$ enak 0, torej je

$$(D - \lambda_1 I)(D - \lambda_2 I) \cdots (D - \lambda_k I) = 0. \quad (3)$$

Iz (3) izpeljemo

$$P(D - \lambda_1 I)P^{-1}P(D - \lambda_2 I)P^{-1} \cdots P(D - \lambda_k I)P^{-1} = 0 \quad (4)$$

kjer je $P(D - \lambda_i I)P^{-1} = PDP^{-1} - \lambda_i I = A - \lambda_i I$. □