LU razcep

Znamo: $Lx = b$, $Ux = b$,

L spodnja trik., U zgornja trik.

Časovna zahtevnost: $O(n^2)$.

Ideja LU razcepa: $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

- problem prevedite na reševanje enostavnejšega sistema
- ekonomično rešite ta sistem (ali več sistemov
- iz rešitve enostavnejših sistemov pridobite rešitev originalnega

Če bi za $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ poznali t.i. LU razcep, bi šlo enostavno:

$$A = LU; \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \diagdown & \\ 0 & & \diagdown \end{bmatrix}$$

Potem:
$$Ax = b$$
$$(LU)x = b \qquad ?? \quad O(?)$$

$$L(Ux) = b\ ; \quad y = Ux$$

$$Ly = b\ ; \text{ direktno } \mathcal{O}(n^2)$$

$$Ux = y\ ; \text{ obratno } \mathcal{O}(n^2)$$

Ali vedno obstaja LU razcep? NE!

Primer:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & z \\ 0 & w \end{bmatrix}$$

$$y = 0$$
$$xy + 1 \cdot 0 = 2$$
$$0 = 2 \quad \times$$

Opazimo:
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Izrek: Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sta ekvival. izjavi:

a) Obstaja enolični razcep (LU razcep)

$A = LU$, L sp. trik. z 1 na diagonali, U zg. trikotna, neizrojena

b) Vse vodilne podmatrike

$A(1:k, 1:k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, so

nesingularne.

<u>Dokaz</u>: ($\Rightarrow$) $A = L \cdot U$, $1 \le k \le n$

$$A = \begin{array}{c|c|c|} k & A_{kk} & A_2 \\ \hline & A_3 & A_4 \\ & k & n-k \end{array} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{kk} & 0 \\ L_3 & L_4 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} U_{kk} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{bmatrix}}_{U}$$

$\Rightarrow$ L_{kk} je sp. trikotna z 1 na diag.,

U_{kk} zg. trikotna neizrojena

$L_{kk} U_{kk} = A_{kk}$ $\Rightarrow$ A_{kk} neizrojena

($\Leftarrow$) doma!

Velja pa naslednji rezultat!

<u>Izrek</u>: Za vsako nesingularno matriko

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, najdemo tako permutacijsko matriko P, da obstaja LU razcep za PA.

Preprosti primer: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$PA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Algoritem: LU razcep z delnim pivotiranjem

Na j-tem koraku algoritma naredimo naslednje:

- Naj bo $A^{(j)}$ transformirana matrika A na j-tem koraku

$$A \to A^{(1)} = \begin{bmatrix} * & & \\ 0 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{bmatrix} \to A^{(2)} = \begin{bmatrix} * & * & \\ 0 & * & \\ \vdots & 0 & \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$\cdots$

$j+1$

$$A^{(j)} = \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j+1 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A^{(j)} = \left[\begin{array}{cccccc} * & * & * & & & \\ 0 & * & \times & & & \\ 0 & 0 & \times & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{\times} & \\ 0 & & & & \boxed{\times} & \\ & & & & \boxed{\times} & \\ & & & & \boxed{\times} & \\ & & & & \boxed{\vdots} & \\ 0 & 0 & 0 & & \boxed{\times} & \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow j+1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

poiščemo največji element po abs. vred.

- Zamenjamo vrstico z največjim elementom z $(j+1)$ - vrstico (delno pivotiranje).

- Izvedemo Gaussovo eliminacijo vrstic $j+2, \dots, n$:

$$A^{(j+2)} = L_{j+1} A^{(j+1)}.$$

$$L_{j+1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & -l_{j+2,j+1} & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & & -l_{n,j+1} & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow j+1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j+1 \end{array}$$

$$l_{k,j+1} = \frac{a_{k,j+1}^{(j+1)}}{a_{j+1,j+1}^{(j+1)}}$$

Na koncu je:

$$L_{n-1} \cdots L_2 L_1 A = U$$

Da se videti, da je

$$L_j^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & +l_{j+1,j} & & 1 \\ & & & \vdots & & \\ & & & +l_{n,j} & & \end{bmatrix}$$

in je $A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L} U$

<u>Primer</u>: Izračunajte LU razcep <u>brez pivotiranja</u> za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & -2 \\ 1 & 4 & 8 & -4 \end{bmatrix}. \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Časovna zahtevnost LU razcepa je

$$\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n = \underline{\underline{\mathcal{O}(n^3)}}.$$