

BAJACHOVO SKRČITVENO NAČELO

Preslikava $f: M \rightarrow M$ je skrčitev glede na metriko d , če je Lipschitzeva s konstanto $q < 1$.

Če je f skrčitev na polnem metričnem prostoru, ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev x^* .

Če to dobimo kot limito $x_1, x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots$ za poljuben začetni približek x_1 .

Zaprti intervali, zaprti poltraki in cela realna os so v običajni metriki polni prostori.

Na intervalu je funkcija f skrčitev, brž ko ga preslika samega vase, to je tam odvedljiva in ko je $|f'(x)| \leq q$ za neki $q < 1$.

Če za določen x na danem intervalu velja $|f'(x)| \geq 1$, f tam ni skrčitev.

(11) Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{2} \arctan x + 3$.

Pokaži, da ima $f(x) = x$ natanko eno rešitev.

$$\bullet \text{ f je skrčitev } \Leftrightarrow \text{ |f(x) - f(y)| \leq q \cdot |x - y| za } \underline{\underline{\forall x, y \in \mathbb{R}}}$$

$$f \text{ zvezna} \Rightarrow \underset{\text{Lagrange}}{|f(x) - f(y)| = f'(\xi) \cdot |x - y|; \quad \xi \in [x, y]}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\substack{1 \\ 1}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{za } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y|$$

$$\Rightarrow f \text{ skrčitev, } \mathbb{R} \text{ poln metrični prostor}$$

$$\Rightarrow f(x) = x \text{ ima natanko eno rešitev na } \mathbb{R}$$

• Računanje negibne točke:

$x_1 \dots$ začetni približek

$$x_2 = f(x_1)$$

$$x_3 = f(x_2)$$

$$x_4 = f(x_3)$$

$$x_1 = 4$$

$$DN$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 3,6245\dots$$

$$x_4 = 3,65049\dots$$

$$x_1 = 1$$

$$DN$$

11: Vse rešitve enačbe $2x - \cos x = 0$ izračunajte na dve decimali natančno.

$$2x - \cos x = 0 \quad (\text{mi želimo } f(x) = x)$$

$$x = \frac{\cos x}{2} =: f(x)$$

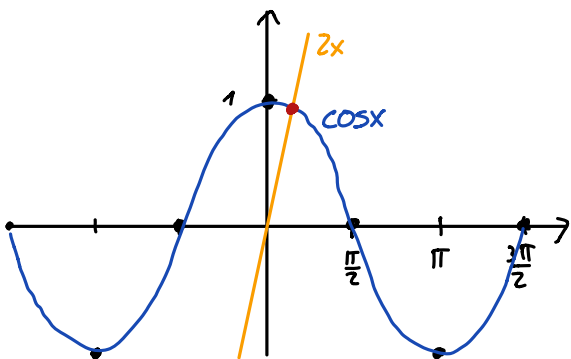
f je zvezna in odvedljiva na $\mathbb{R} \Rightarrow$ Lagrange: $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(\xi); \quad \xi \in [a, b]$

$$f'(x) = -\frac{\sin x}{2} \Rightarrow |f'(x)| = \left| -\frac{\sin x}{2} \right| = \frac{1}{2} |\sin x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{za } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(\xi) \leq \frac{1}{2} \quad \text{za } \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y| \quad \text{za } \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ je skrajšev na } \mathbb{R}$$

Po Banachovem skrajševnem načelu ima torej enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev (negibno točko)



$$2x - \cos x \Big|_{x=0} = -1 < 0$$

$$2x - \cos x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi > 0$$

$\Rightarrow$ lahko se omejimo na območje $[0, \frac{\pi}{2}]$

Začetni približek: $x_1 = 1$

$$x_2 = f(x_1) = \frac{\cos 1}{2} = 0,2701511529$$

$$x_3 = f(x_2) = 0,48186528$$

$$x_4 = f(x_3) = 0,4430660159$$

$$x_5 = f(x_4) = 0,4514207349$$

$$x_6 = f(x_5) = 0,44989865$$

$$x_7 = f(x_6) = 0,45025646$$

$$x_8 = f(x_7) = 0,4501677605$$

$$x_9 = f(x_8) = 0,4501870598$$

točna rešitev: 0,450189

Ocenite napake zadnjega in predzadnjega približka.

Ocena napake:

Br̃e ko izračunamo vsaj dva približka, lahko ocenimo tudi napako:

$$d(x_n, x^*) = \frac{g}{1-g} d(x_{n-1}, x_n).$$

Če je tudi $f'(x) \geq 0$ za vse x , zaporedje približkov bodisi narašča proti x^*
bodisi pada proti x^* .

Če pa je $f'(x) \leq 0$ za vse x , x^* leži med poljubnima zaporednima približkoma.

Ocena napake v našem primeru:

$$d(x_n, a) = |f(x_{n-1}) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - a| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - a|$$

$$a \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{\pi}{2} \approx 1,57 \Rightarrow |x_1 - a| = |1 - a| \leq 1$$

$$\Rightarrow d(x_n, a) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$n=8: \quad d(x_8, a) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0,0078125$$

$$n=9: \quad d(x_9, a) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 0,00390625$$

$$x_8 = 0,45016 \pm 0,0078125 \Rightarrow \text{zaokroženo na 2 decimali } 0,44, \\ 0,45 \text{ ali } 0,46 //$$

$$x_9 = 0,45018 \pm 0,00390625 \Rightarrow \text{zaokroženo na 2 decimali} \\ \text{je to vedno } \underline{\underline{0,45}}$$

1) Koliko rešitev ima enačba $1 + e^x = xe^x$?

$$1 + e^x = x \cdot e^x \quad | : e^x \quad \text{ker želimo obliko } f(x) = x$$

$$e^{-x} + 1 = x \Rightarrow f(x) = 1 + e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x): \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty) \\ x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\} f(x) = x \text{ ima lahko rešitev le na } [1, \infty)$$

$$|f'(x)| = |-e^{-x}| = |e^{-x}| = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \underset{\substack{\uparrow \\ x \geq 1}}{\leq} \frac{1}{e}$$

$$f \text{ je zvezna in odvedljiva} \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x - y| \quad (\text{Lagrange})$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{e} \cdot |x - y|, \quad \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow f$ je skrčitev na $[1, \infty)$

$\Rightarrow f(x) = x$ ozi. $1 + e^x = x \cdot e^x$ ima natanko eno rešitev na intervalu $[1, \infty)$.

Poiščimo jo: $x_1 = 1$

točna rešitev: 1.248464542761079

$$x_2 = f(x_1) = f(1) = 1,3678...$$

$$x_3 = f(x_2) = 1,254646...$$

$$x_4 = 1,2851766...$$

$$x_5 = \dots$$

$$x_6 = \dots$$

Opomba: $f'(x) < 0$ za $\forall x$!

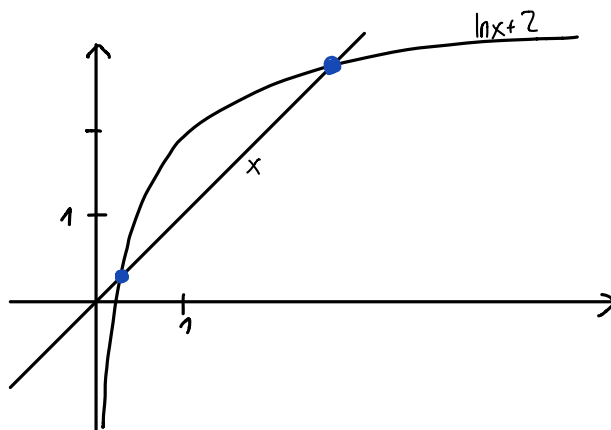
$\Rightarrow$ točna rešitev leži med dvema zaporednima približkoma.

Koliko rešitev ima enačba $x = \ln x + 2$?

$\ln x$ definiran za $x \in (0, \infty)$

Opazujemo $x = \ln x + 2$ na $(0, \infty)$

Sklepa:



$$f(x) := \ln x + 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} < 1 \quad \text{za } x > 1 \quad \Rightarrow \text{ločimo območji } (0, 1) \text{ in } [1, \infty)$$

• $[1, \infty)$:

$$f \text{ je zvezna} \Rightarrow (\text{Lagrange}) \quad |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \quad \xi \in [x, y]$$

$$f(x) = \ln x + 2 \quad \text{Če želimo } f(x) = x \text{ na intervalu } I, \text{ mora veljati } f(I) \cap I \neq \emptyset!$$

$$f(1) = 2 \quad : \quad f([1, 2]) = [2, 2.6931 \dots] \subseteq \text{torej na intervalu } [1, 2] \text{ ni rešitve, saj je } [1, 2] \cap [2, 2.6931] = \emptyset$$

$\Rightarrow$ na $[1, 2)$ enačba $f(x) = x$ nima rešitve

$$\text{Kaj pa } [1, \infty) \setminus [1, 2) = [2, \infty)?$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}, \text{ ker je } x \geq 2 \quad (\text{za } x \geq 1 \text{ se ne bi dalo omejiti s številom manjšim od 1})$$

$$(\text{Lagrange}) \quad |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq \frac{1}{2} \cdot |x - y| \quad \text{za } x, y \in [2, \infty)$$

$\Rightarrow f$ je skritek na intervalu $[2, \infty)$!

$\Rightarrow$ po Banachovem skritvenem natezu $[2, \infty)$ je poln prostor, f skritek! ima $f(x) = x$ na $[2, \infty)$ natanko eno rešitev

DS: poiščite približek (npr. 3.13095...)

• $(0,1)$: edino ta interval se ostane

opazujemo interval $[0,1]$ (da imamo poln metrični prostor)

Če $f(x) = \ln x + 2$ ne moremo uporabiti B.s.n.

$$x = \ln x + 2$$

$$\ln x = x - 2$$

$$x = e^{x-2} \Rightarrow f(x) = e^{x-2}$$

$$f([0,1]) = [e^{-2}, e^{-1}] \subset [0,1] \checkmark$$

$$f'(x) = e^{x-2} \leq e^{-1}$$

$$\uparrow \\ x \in [0,1]$$

$$\text{Lagrange: } |f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x - y| \leq e^{-1} \cdot |x - y|$$

$\uparrow$
ker je f zvezna in odvedljiva

$$\uparrow \\ e^{-1} < 1$$

$\Rightarrow f$ je skrajšitev na $[0,1]$ $\Rightarrow f(x) = x$ ima natanko eno rešitev na $[0,1]$

$\Rightarrow x = \ln x + 2$ ima natanko 2 rešitvi na $(0, \infty)$

1) Izračunajte vse rešitve enačbe $x = 3 + \frac{1}{x^4}$ na 7 decimalah natančno.

3.3.2021

$$x = 3 + \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\substack{|| \\ 3}} \quad f(x) := 3 + \frac{1}{x^4}$$

Ker je $f(x) \geq 3$, ima enačba $x = f(x)$ rešitev le v intervalu $[3, \infty)$, ki je poln metrični prostor.

$$f'(x) = -4 \cdot \frac{1}{x^5} < 0 \quad \text{in} \quad |f'(x)| = \frac{4}{x^5} \leq \frac{4}{3^5} < 1$$

$$f \text{ zvezna in odvedljiva na } [3, \infty) \Rightarrow \text{Lagrange: } |f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x - y| \leq \frac{4}{3^5} \cdot |x - y|$$

$$\begin{array}{l} z \in [x, y] \\ x, y \in [3, \infty) \end{array}$$

$\Rightarrow f$ je skrajšitev na $[3, \infty)$

$\Rightarrow$ Banachovo skrajšitveno načelo: f ima natanko eno rešitev na $[3, \infty)$.

Približek:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 3.0123457 \\ x_3 &= 3.0121445 \\ x_4 &= 3.0121478 \\ x_5 &= 3.0121477 \\ x_6 &= 3.0121477 \end{aligned}$$

Ker je $f'(x) < 0$ za vse $x \in [3, \infty)$, točna rešitev leži med dvema zaporednima približkoma.

Ker sta x_5 in x_6 (zaokroženo) enaka do 7. decimalne natančno, je točna rešitev

do 7. decimalne natančno enaka 3.0121477.

1) Dokazi, da ima enačba $x = \frac{x^3}{24} - \frac{x^5}{160} + 1$ natanko eno realno rešitev.

Rešitev izračunaj na štiri decimalke natančno.

Opazujemo funkcijo $f(x) = \frac{x^3}{24} - \frac{x^5}{160} + 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{24} - \frac{5x^4}{160} = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{32}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} = \frac{x^4}{32} \Leftrightarrow 4 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$f'(x) < 0 \text{ za } x < -2 \text{ in } x > 2$$

$$f'(x) > 0 \text{ za } x \in (-2, 2)$$

Pregledamo vsak interval posebej:

• $(-\infty, -2)$: tu f padajoča, $f(-2) = -\frac{1}{3} + \frac{2^5}{2^8} + 1 = 1 - \frac{5}{15} = \frac{15-5}{15} = \frac{10}{15}$

$$f(x) \geq \frac{10}{15} \text{ za } x \in (-\infty, -2)$$

$$\Rightarrow f((-\infty, -2)) \neq (-\infty, -2) \text{ tu ni rešitve}$$

• $(2, \infty)$: tu f padajoča, $f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 1 = 1 - \frac{3-5}{15} = \frac{15-2}{15} = \frac{13}{15}$

$$f(x) \leq \frac{13}{15} \text{ za } x \in (2, \infty)$$

$$\Rightarrow f((2, \infty)) \neq (2, \infty) \text{ tu ni rešitve}$$

• Rešitve torej iščemo na $[-2, 2]$

$$M = [-2, 2] \leftarrow \text{poln metrični prostor}$$

$$f(M) = \left[\frac{10}{15}, \frac{13}{15} \right] \subseteq M \quad \checkmark \quad (\text{to je potreben pogoj za rešitev})$$

$\uparrow$

f je na M naraščajoča

f skrajitev?

$$|f'(x)| = \left| \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{32} \right| = \frac{1}{32} |x^2| \cdot |4 - x^2| \leq \frac{1}{32} \cdot 2^2 \cdot |4 - 0| = \frac{1}{2}$$

$\swarrow$ dalo bi se bolj natančno

$\Rightarrow f$ je skrajitev $\Rightarrow$ na $[-2, 2]$ obstaja natanko ena rešitev.

Izračunamo približke:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = f(x_0) = f(1) = 1.03591664 \dots$$

$$x_2 = 1.0388144 \dots$$

$$x_3 = 1.039148384 \dots$$

$$x_4 = 1.039181291 \dots$$

$$x_5 = 1.039184535 \dots$$

} razlika med x_4 in x_5
je manjša od 10^{-5}

$$\Rightarrow \text{ocena napake: } d(x_n, a) \leq \frac{q}{1-q} \cdot d(x_{n-1}, x_n) = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} \cdot d(x_4, x_5) = \frac{1}{7} \cdot 10^{-5} < 1.5 \cdot 10^{-6}$$

$\uparrow$
 $f(a) = a$

$$\Rightarrow d(x_5, a) < 1.5 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow a \in (1.039184534 - 1.5 \cdot 10^{-6}, 1.039184534 + 1.5 \cdot 10^{-6})$$

Na štiri decimalke: $a \approx 1.0392$

