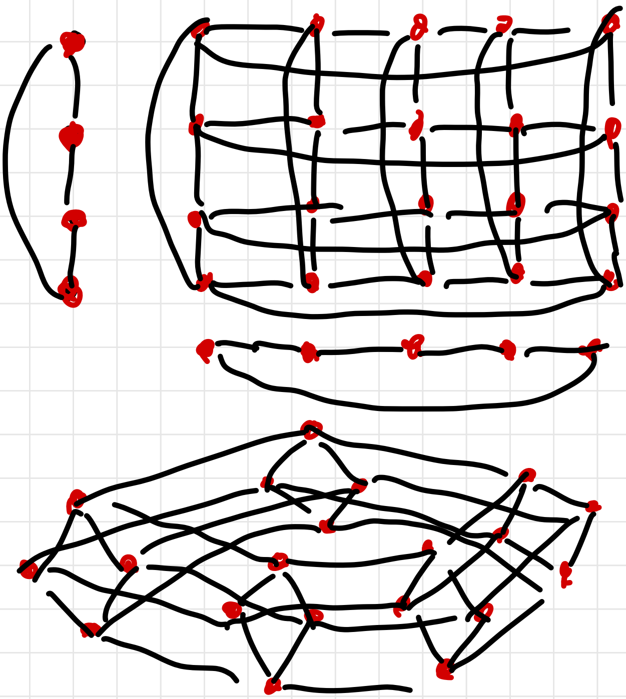
DS 2 VAJE 4

1. • NARIŠI $C_4 \square C_5$.

$V(C_4 \square C_5) = V(C_4) \times V(C_5)$

$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1$ IN $x_2 \sim y_2$

ALI $x_1 \sim y_1$ IN $x_2 = y_2$



• $|V(G)| = n_1$, $|E(G)| = m_1$

$|V(H)| = n_2$ $|E(H)| = m_2$

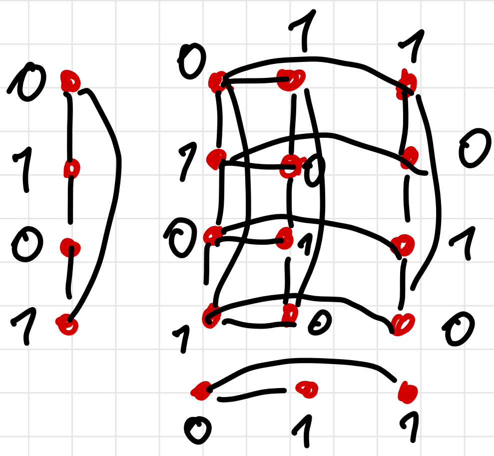
$|V(G \square H)| = ?$ $= n_1 \cdot n_2$

$|E(G \square H)| = ?$ $= n_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot m_1$

- PREMER $C_{n_1} \square C_{n_2}$?

$$\operatorname{diam}(C_{n_1} \square C_{n_2}) = \operatorname{diam}(C_{n_1}) + \operatorname{diam}(C_{n_2})$$
$$= \left\lfloor \frac{n_1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{2} \right\rfloor$$

2. POKAŽI, DA JE KARTEZIČNI PRODUKT DVODELNIH GRAFOV DVODELEN.



$f : V(G_1) \longrightarrow \{0, 1\}$ BARVANJE G_1

$g : V(G_2) \longrightarrow \{0, 1\}$ BARVANJE G_2

$h: V(G_1 \square G_2) \longrightarrow \{0,1\}$

$h(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \mod 2$

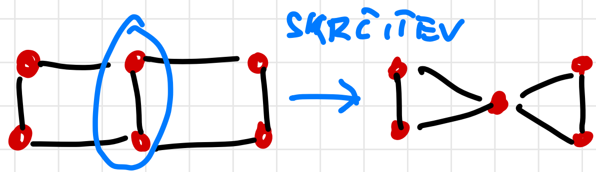
$\left(\text{ALI} \quad f(x_1) \oplus g(x_2) \right)$

ČE $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, POTEM

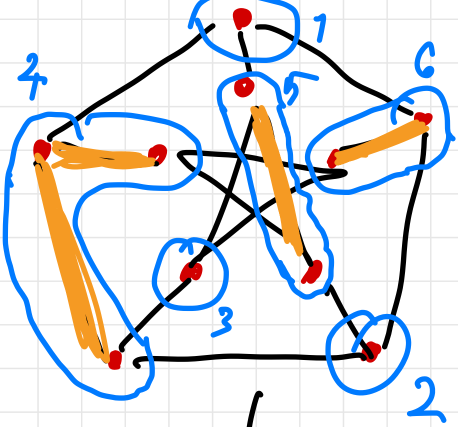
- $x_1 = y_1$ IN $x_2 \sim y_2$ $\quad f(x_1) = f(y_1)$, $g(x_2) \neq g(y_2)$ ✓
- $x_1 \sim y_1$ IN $x_2 = y_2$ $\quad f(x_1) \neq f(y_1)$, $g(x_2) = g(y_2)$ ✓

$\Rightarrow$ BARVANJE PRAVILNO

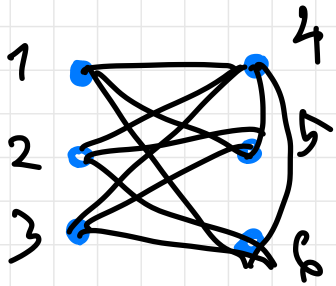
3. ALI JE $K_{3,3}$ MINOR GRAFA $P(5,2)$?



$P(5,2)$

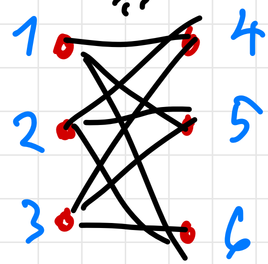


STISNEM POVEZAVE

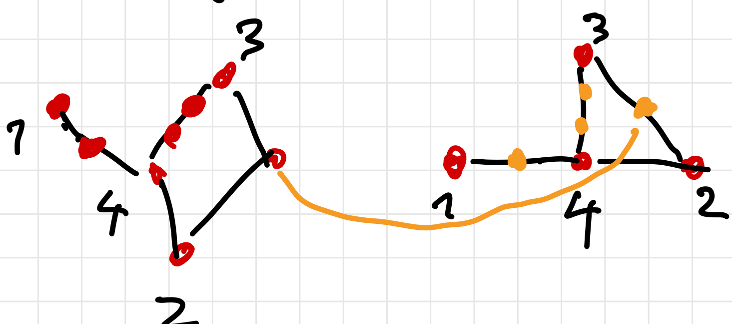


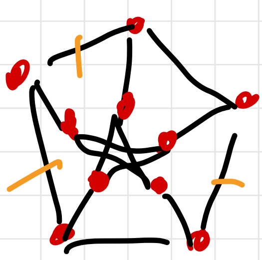
ODSTRANIM POVEZAVE

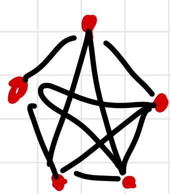
$K_{3,3}$



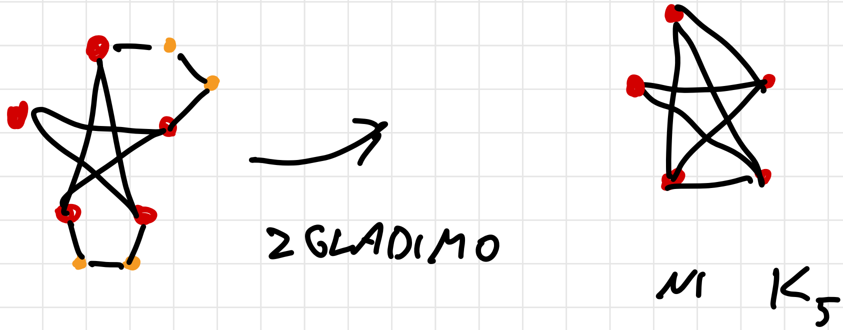
ALI $P(5,2)$ VSEBUJE SUBDIVIZIJO K_5?





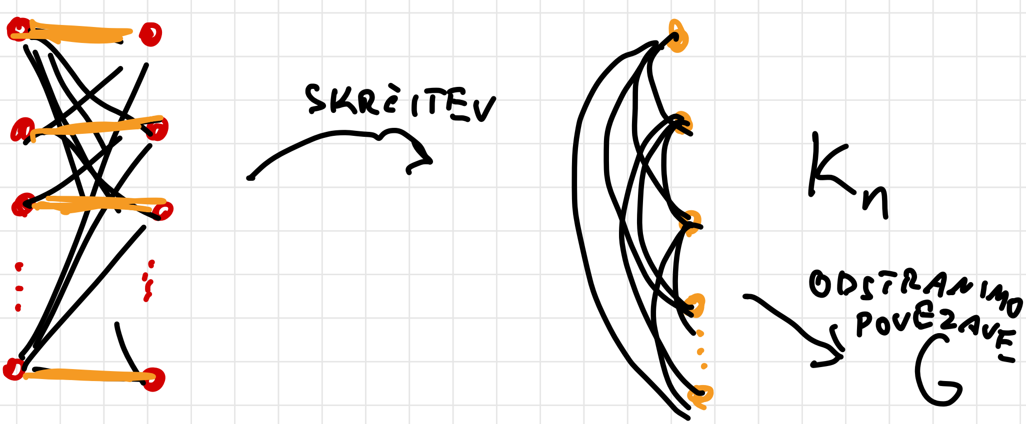


ODSTRANIM POVEZAVE

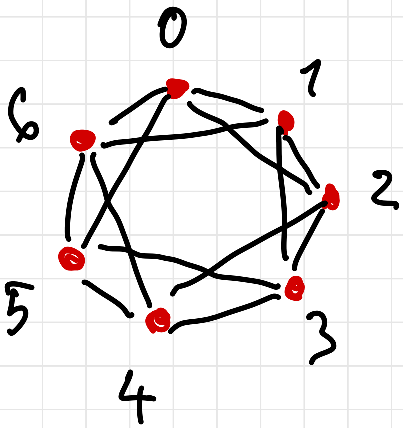


$P(5,2)$ NE VSEBUJE SUBDIVIZIJE K_5, $P(5,2)$ JE 3-REGULAREN, K_5 PA 4-REGULAREN

4. NAJ BO G POLJUBEN, $|V(G)| = n$. POKAŽI, DA JE G MINOR $K_{n,n}$.

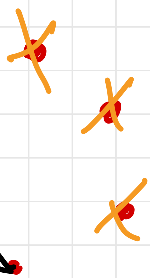


5. NAJ BO $G = \mathrm{Circ}(7, \{1,2,5,6\})$. DOLOČI $\kappa(G)$!

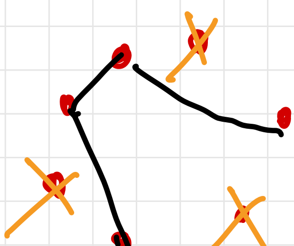


$$\kappa(G) \le \delta(G) = 4$$

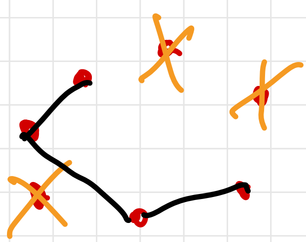
RECIMO DA ODSTRANIMO 3 VOZLIŠČA.



• 3 ZAPOREDNA, OSTANE POVEZAN

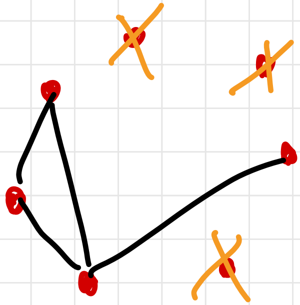


• 3 NESOSEDNA, $\Rightarrow$ POVEZAN



• 2 SOSEDNA + NASPROTNI $\Rightarrow$ POVEZAN

•



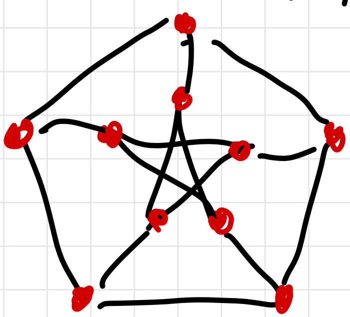
2 SOSEDNA + NE-NASPROTEN

$\Rightarrow$ POVEZAN

$$\Rightarrow \kappa(G) > 3$$

$$\Rightarrow \kappa(G) = 4$$

6. $\kappa(P(5,2)) = ?$



$$\kappa(G) \leq \delta(G) = 3$$

ČE ODSTRANIMO 2 VOZLIŠČI:

- OBE IZ ZUNANJEGA CIKLA

$\Rightarrow$ NOTRANJI CIKEL OSTANE POVEZAN IN ZUNANJA VOZLIŠČA POVEZANA Z NOTRANJIM

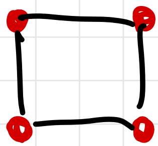
- OBE IZ NOTRANJEGA CIKLA: SIMETRIČNO
- ENO IZ ZUN. IN ENO IZ NOT.

  ⇒ ZUNANJA POVEZANA, NOTRANJA POVEZANA IN POVEZAVE MED NJIMA

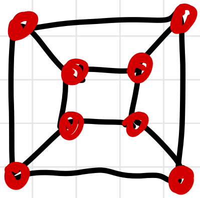
$\Rightarrow \kappa(G) > 2$

$\Rightarrow \kappa(G) = 3$

7. $\kappa(Q_n) = ?$



$\kappa(Q_2) = 2$

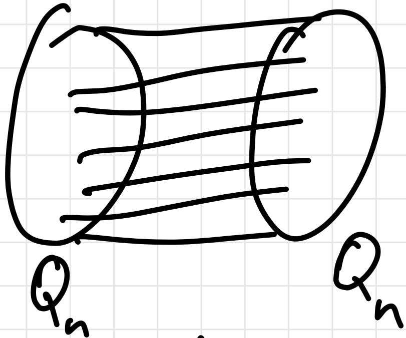


$\kappa(Q_3) = 3$

INDUKCIJA NA n (I.P. $\kappa(Q_n) = n$)

- $n = 1, 2, 3$ ✓
- $n \rightsquigarrow n+1$

Q_{n+1} :



$$\kappa(Q_{n+1}) \leq \delta(Q_{n+1}) = n+1$$

DOKAŽIMO, DA ČE ODSTRANIMO n VOZLIŠČ OSTANE POVEZANA.

- VSEH n VOZLIŠČ ODSTRANIMO V ENI KOPIJI Q_n $\Rightarrow$ DRUGA KOPIJA OSTANE POVEZANA IN VOZLIŠČA V PRVI SO POVEZANA Z DRUGO KOPIJO ✓

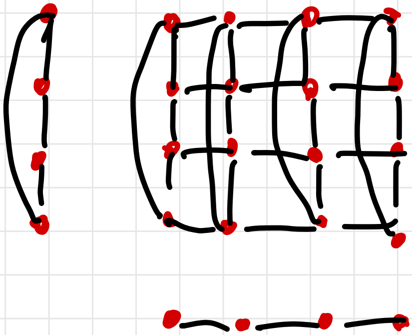
- ODSTRANIMO i VOZLIŠČ V PRVI KOPIJI Q_n IN $n-i$ V DRUGI. PO I.P. STA OBE KOPIJI ŠE VEDNO POVEZANI. KER 2^n POVEZAV MED KOPIJAMA IN ODSTRANILI NAJVEČ n POVEZAV MED KOPIJAMA $\Rightarrow$ POVEZANO

$i < n$
$n-i < n$

$$\Rightarrow \kappa(Q_{n+1}) > n \Rightarrow \kappa(Q_{n+1}) = n+1$$

8. $\gamma_R(C_n \square P_m)$

$C_4 \square P_4$



$\gamma_R(C_4 \square P_4) \leq \delta = 3$

ČE ODSTRANIM 2 VOZLIŠČI:

- ČE VOZLIŠČI V RAZLIČNIH KOPIJAH C_4 ⇒ SO VSI VERTIKALNI NIVOJI ŠE VEDNO POVEZANI IN NIVOJI POVEZANI MED SEBOJ

- ČE VOZLIŠČI V ISTI KOPIJI C_4 ⇒ ⇒ VSE OSTALE KOPIJE POVEZANE IN POVEZANE MED SEBOJ IN Z VOZLIŠČEMA V PRVI KOPIJI.

PODOBNO POLJUBNA n, m.