

LINEARNA ALGEBRA 2020/21
19. VAJE: 10.3.2021

1. Naj bo $U = V \oplus W$ in P projekciji na V vzdolž W . Pokaži Podprostor V je invarianten za preslikavo A natanko tedaj, ko je $PAP = AP$. Podprostora V in W sta oba invariantna za A natanko tedaj, ko je $AP = PA$.
2. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bodo 1, 2, 3 lastne vrednosti in $(2, -1, 1)^T$ lastni vektor za 2 matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}.$$

Določi a, b, c in preostala lastna vektorja. Določi A^{10} (A^k).

4. Naj bo A podobna diagonalni matriki. Pokaži, da je tudi $\begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix}$ podobna diagonalni matriki.
5. Naj bo A obrnljiva in $p(t)$ njen karakteristični polinom. Pokaži, da je $\frac{(-t)^n}{\det A} p(1/t)$ karakterističen polinom matrike A^{-1} .
6. Izrazi prosti člen in koeficient pri t^{n-1} karakterističnega polinoma matrike A . Pokaži, da je $\text{tr}(A)$ enak vsoti lastnih vrednosti štetih z alg. večkratnostjo in $\det(A)$ produkt lastnih vrednosti štetih z alg. večkratnostjo.

LINEARNA ALGEBRA 2020/21

19. VAJE: 10.3.2021

1. **Prvi del** ($\Rightarrow$) Če je za vsak $v \in V$, tudi $Av \in V$, potem za vsak $x = v + w$ velja $PAPx = PAx = Av = APx$. (Uporabili smo: $Pv = v$ za vsak $v \in V$.)

($\Leftarrow$) Želimo pokazati $Av \in V$ za vsak $v \in V$. Dobimo $Av = APv = PAPv$ povsem desna stran enakosti je v V torej je tudi povsem leva stran v V .

Drugi del ($\Rightarrow$) Če je podprostor V invarianten za preslikavo A , je $PAP = AP$ in če je podprostor W invarianten za preslikavo A , je $(I - P)A(I - P) = A(I - P)$. Iz enakosti $PAP = AP$ in $(I - P)A(I - P) = A(I - P)$ dobimo $AP = PA$.

($\Leftarrow$) Če je $AP = PA$ in $v \in V$, potem je $Av = APv = PAx$. Desna stran je v V , torej je tudi leva v V .

Če je $w \in W$ je $0 = A0 = APw = PAw$ torej je $Aw \in \ker P = W$. (Od tu naprej uporabimo, da je $V = \operatorname{im} P = \ker(I - P)$ in $W = \ker P = \operatorname{im}(I - P)$. Dokaz tega ni zahteven.)

2. **(a)** Izračunamo karakteristični polinom $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Determinanta se ne spreminja, če od vrstic/stolpcev odštejemo večkratnike vrstic/stolpcev.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1+\lambda \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

Dobimo $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)((-2 - \lambda)(3 - \lambda) + 6) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) = -\lambda(1 - \lambda)^2$. Dobimo dve lastni vrednosti: 0 (za alg. večkratnostjo 1) in 1 (za alg. večkratnostjo 2).

(b) Lastne vektor za 0 poiščemo z enačbo $(A - 0I)x = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ena izmed rešitev enačbe je $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ki je hkrati lastni vektor z lastno vrednostjo 0.

Lastne vektor za 1 poiščemo z enačbo $(A - I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Splošna rešitev je $y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lastna vektorja za 1 sta $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) Dobimo $A[v_1; v_2; v_3] = [0; v_2; v_3]$ oziroma

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika A je podobna $D = \text{diag}(0, 1, 1)$ in $A = [v_1; v_2; v_3]D[v_1; v_2; v_3]^{-1}$.

(d) Dobimo $A^k = [v_1; v_2; v_3]D^k[v_1; v_2; v_3]^{-1}$. Ker je $D^k = D$, je tudi $A^k = A$.

3. (To je rešitev naloge z malo manj podatki (rešitev na koncu je enaka):

Naj bodo 1 lastna vrednost in $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lastni vektor (ne nujno z lastno vrednostjo 1) matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}.$$

Določi a, b, c , preostalo lastno vrednost in preostala lastna vektorja.)

Izračunamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2a - 4 \\ -b + c \end{bmatrix}$$

Ker je $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ lastni vektor iz prve vrstice dobimo lastno vrednost 2, drugi vrstici pa nam vrne enačbi

$$-2 = 2a - 4 \text{ in } 2 = -b + c.$$

Torej je $a = 1$. Ker je 1 lastna vrednost, ima matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & b & c - 1 \end{bmatrix}$$

determinanto 0. Dobimo $2(c - 1) = 0$, torej je $c = 1$ in $b = -1$. Jedro matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

nam, da lastni vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Zadnjo lastno vrednost dobimo iz determinante matrike $\det(A) = 6$ torej mora biti zadnja lastna vrednost enaka 3. Pripadajoč, lastni vektor za lastno vrednost 3 dobimo iz jedra matrike

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor za lastno vrednost 3 je enak $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1. Naj bo $U = V \oplus W$ in P projekciji na V vzdolž W . Pokaži Podprostor V je invarianten za preslikavo A natanko tedaj, ko je $PAP = AP$. Podprostora V in W sta oba invariantna za A natanko tedaj, ko je $AP = PA$.

$$Av \in V \quad P: U \rightarrow U \quad P(v+w) = v \in V \subseteq U.$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad V \oplus W$$

Prejeto:

Če je V invarianten, potem je $PAP = AP$.

$$PAP = AP \Rightarrow V \text{ je invarianten.}$$

Pokažati bomo:

$$\forall v \in V \quad Av \in V$$

$$\forall v \in V \quad A_v^{P_v=v} = AP_v^{AP=PA} = P(AP_v) \in \text{Im } P = \underline{V}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} V \text{ in } W \text{ sta invariantna za } A \\ \Leftrightarrow \\ AP = PA \end{array}}$$

Če je P projekcija na V vzdolž W , potem je $I-P$ projekcija na W vzdolž V . Potem je

$$(I-P)(\underbrace{v+w}_{V \oplus W}) = v+w - v = w$$

V in W invariantna / po 1. trditvi dobimo

$$\underline{PAP} \stackrel{(*)}{=} AP$$

$$(I-P)A(I-P) \stackrel{(*)}{=} A(I-P)$$

$$\underline{A} - PA - \underline{AP} + PAP \stackrel{(*)}{=} \underline{A} - \underline{AP}$$

$$AP \stackrel{(*)}{=} PAP \stackrel{(*)}{=} PA$$

$$\rightarrow PA = AP$$

V 1. trditvi
zamenjamo vloži V
in W in vloži P
in $I-P$.

Če je $AP = PA$, potem sta V in W invariantna

$$\boxed{P^2 = P}$$

$$AP = PA \quad / \cdot P \text{ (z desne)}$$

$$AP^2 = AP = PAP \quad \text{Uporabimo 1. trditev} \rightarrow V \text{ je invarianten}$$

$$\boxed{(I-P)^2 = I-P}$$

$$-AP = -PA \quad / +A$$

$$A-AP = A(I-P) = A-PA = (I-P)A \quad / \cdot (I-P) \text{ (z desne)}$$

$$A(I-P) = (I-P)A(I-P) \rightarrow \text{Uporabimo 1. trditev} \rightarrow W \text{ je invarianten.}$$

Lastne vrednosti, lastni vektorji

A - kvadratna $n \times n$ matrika (endomorfizem) . vektor x je lastni vektor matrike A , če:

- $x = 0$
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \quad Ax = \lambda x \quad (\lambda \text{ je lastna vrednost})$
(ali $\text{lin}\{x\}$ je invarianten podprostor za A)

Iščanje lastnih vrednosti

$Ax = \lambda x \rightarrow (A - \lambda I)x = 0$ iščemo kaj ima enačba netrivialno rešitev. To je vedno tedaj, ko $A - \lambda I$ ni obrnljiva ($\det(A - \lambda I) = 0$).

$P_A(t) = \chi_A(t) = \det(A - tI)$ - karakteristični polinom.

Nile karakterističnega polnoma so lastne vrednosti.

Ko imamo lastno vrednost λ lahko poiščemo lastni vektor z lin. enačbo $(A - \lambda I)x = 0$.

2. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1+\lambda \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \left[(-2-\lambda)(3-\lambda) + 6 \right]$$

$$(1-\lambda) \left[\lambda^2 - \lambda - 6 + 6 \right] = (1-\lambda) \lambda (\lambda-1) \\ = -(1-\lambda)^2 \lambda$$

núle (lastne vrednosti) $\lambda_1 = 0$ $\lambda_{2,3} = 1$

$$\lambda=0 \quad Ax=0 \quad \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}$$

$t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je parametricku vektor

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$\lambda=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sta lastni vektorja za } 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 \\ 3-2 \\ 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ - diagonalizacija matrike } A$$

$$A^n = P \begin{bmatrix} 0 & \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}^n P^{-1} = A$$

3. Naj bodo 1, 2, 3 lastne vrednosti in $(2, -1, 1)^T$ lastni vektor za 2 matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & b & c \end{bmatrix}.$$

Določi a, b, c in preostala lastna vektorja. Določi A^{10} (A^k).

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

↳ Uporabimo, da so l.v. ničle kv. polnoma.

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ a & 4-\lambda & 0 \\ 0 & b & c-\lambda \end{bmatrix} = (c-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ a & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(c-\lambda) (\lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2a)$$

c je ničla polnoma

$$\rightarrow c = \underline{1}, 3$$

$$4+2a=6 \quad \boxed{a=1}$$

$$\frac{(\lambda^2 - 5\lambda + 6)}{(\lambda^2 - 3\lambda + 2)}$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -b+1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-b+1 = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{tr}(A) = b = 1 + 2 + 3 \\ \det(A) = b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \end{array}$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 3$$

$$A^{10} \sim$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 1^{10} & 3^{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = P \begin{bmatrix} 2^{10} & & \\ & 1^{10} & \\ & & 3^{10} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ ali } A \in M_n(\mathbb{C})$$

4. Naj bo A podobna diagonalni matriki. Pokaži, da je tudi $\begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix}$ podobna diagonalni matriki.

A jo možno diagonalizirati $\Leftrightarrow \exists P \quad PAP^{-1} \rightarrow \text{diagonalna}$

$\Leftrightarrow A$ ima n lin. neodvisnih lastnih vektorjev

$\Leftrightarrow$ obstaja baza $v_1, \dots, v_n$ sestavljena iz lastnih vektorjev matrike A

Če ima A n -različnih lastnih vrednosti $\Rightarrow A$ ima diagonalizacijo

$\begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix}$ ima $2n$ lin. neodvisnih lastnih vektorjev

Vemo A ima n lin. neodvisnih l. vektorjev.

$$Av = \lambda v \quad \begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 - Av_2 \\ -Av_1 + Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(v_1 - v_2) \\ -A(v_1 - v_2) \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A(v_1 - v_2) &= \mu v_1 \\ -A(v_1 - v_2) &= \mu v_2 \end{aligned} \leadsto \begin{bmatrix} \mu v_1 = -\mu v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mu = 0 \\ \text{ali} \\ v_1 = -v_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ -v \end{bmatrix} \checkmark \begin{bmatrix} A(2v) \\ -A(2v) \end{bmatrix} = \underline{2\lambda} \begin{bmatrix} v \\ -v \end{bmatrix} \quad A(v_1 - v_2) = 0$$

$$\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot 0 \\ -A \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$$

Za vsak lastni vektor $v_1, \dots, v_n$ matrice A

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_i \\ -v_i \end{bmatrix}.$$

Te vektorji so lin neodvisni (vemo, da so $v_1, \dots, v_n$ lin. neodvisni.)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \begin{bmatrix} v_i \\ v_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \beta_i \begin{bmatrix} v_i \\ -v_i \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i &= 0 \leadsto \alpha_i + \beta_i = 0 \\ &\text{lin. neodvisnost } v_i \\ \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i &= 0 \leadsto \alpha_i - \beta_i = 0 \\ &\forall i \quad \alpha_i = \beta_i = 0 \end{aligned} \begin{matrix} + \nearrow 2\alpha_i = 0 \\ \searrow -2\beta_i = 0 \end{matrix}$$

$A \sim D$ - diagonalna matrika

$$P = [v_1 \dots v_n]$$

prehodni matriki

$$\begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & & v_n & v_1 & v_2 & & v_n \\ -v_1 & -v_2 & & -v_n & v_1 & v_2 & & v_n \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrika

5. Naj bo A obrnljiva in $p(t)$ njen karakteristični polinom. Pokaži, da je $\frac{(-t)^n}{\det A} p(1/t)$ karakterističen polinom matrike A^{-1} .

$$p_A(t) \quad p_{A^{-1}}(t) = \frac{-t^n}{\det A} p_A\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$p_A(t) = \det(A - tI)$$

$$p_{A^{-1}}(t) = \det(A^{-1} - tI)$$

$$\det(xy) = \det(x) \cdot \det(y) \quad (1)$$

$$\det(tx) = t^n \cdot \det(x) \quad (2)$$

$$\det(A^{-1} - tI) \stackrel{?}{=} \frac{(-t)^n}{\det(A)} \det\left(A - \frac{1}{t}I\right) = (*)$$

$$\frac{1}{\det(A)} = \det(A^{-1})$$

$$\begin{aligned} (-t)^n \det(A^{-1}) \det\left(A - \frac{1}{t}I\right) &= (-t)^n \det\left(\overbrace{A^{-1}A}^I - \frac{1}{t}A^{-1}\right) \\ &= (-t)^n \det\left(I - \frac{1}{t}A^{-1}\right) = \det\left(-tI + \frac{t}{t}A^{-1}\right) = \det(A^{-1} - tI) \end{aligned}$$

Če $Ax = \lambda x$ in A obrnljiva, je

$$x = A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x \quad \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x. \quad (\text{če je } \lambda \text{ l.v. } A \text{ in } A \text{ obrnljiva, potem je } \frac{1}{\lambda} \text{ l.v. } A^{-1})$$

6. Izrazi prosti člen in koeficient pri t^{n-1} karakterističnega polinoma matrike A . Pokaži, da je $\text{tr}(A)$ enak vsoti lastnih vrednosti štetih z alg. večkratnostjo in $\det(A)$ produkt lastnih vrednosti štetih z alg. večkratnostjo.

$$P_A(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j t^j + \underline{(-t)^n} \text{ - polinom stopnje } n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-t & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}-t \end{bmatrix} \quad \frac{d_0 = \det(A)}{P_A(t) = \det(A - tI)} \\ d_0 = P_A(0) = \det(A)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn}-t \end{bmatrix} \quad \det(A) = \sum_{g \in S_n} \text{sgn } g \cdot a_{1g(1)} a_{2g(2)} \dots a_{ng(n)}$$

$$P_A(t) = \sum \text{sgn } g \cdot \overline{a_{1g(1)}} \dots \overline{a_{ng(n)}}$$

$$\overline{a_{ij}} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq j \\ a_{ii} - t & i = j \end{cases} \quad \text{Iščemo koeficient pri } t^{n-1}$$

stopnja $\text{sgn } g \cdot \overline{a_{1g(1)}} \dots \overline{a_{ng(n)}}$ je enak $\#$ i $g(i) = i$.

Zanimajo nas samo členi s stopnjo najmanj $n-1$.

Naj bo $\# i = S(i)$ več ali enako $n-1$. $\begin{matrix} i_1 & \dots & i_{n-1} & i_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ i_1 & & i_{n-1} & i_n \end{matrix} \rightarrow \text{edina možnost} \Rightarrow S = \text{id}.$

Zanimu nas le $(a_1 - t)(a_2 - t)(a_3 - t) \dots (a_n - t) = (-t)^n + \left(\sum_{i=1}^n a_i (-t)^{n-1} \right) + \text{nižji členi}$
 $(-t)^n + \text{tr}(A)(-t)^{n-1}$

$P_A(t)$ nad $\mathbb{C}$ razpade na linearne faktorje

$$P_A(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots (\lambda_n - t) \quad \lambda_i - \text{lastna vrednost}$$

$$\det(A) = P_A(0) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\text{tr} \quad t^{n-1} (-1)^{n-1} \text{tr}(A) = (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \rightarrow \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &= \prod_{i=1}^n \lambda_i \\ \text{tr}(A) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned} \quad \left(\text{lastne vrednosti štejemo z alg. večkratnostjo} \right).}$$