

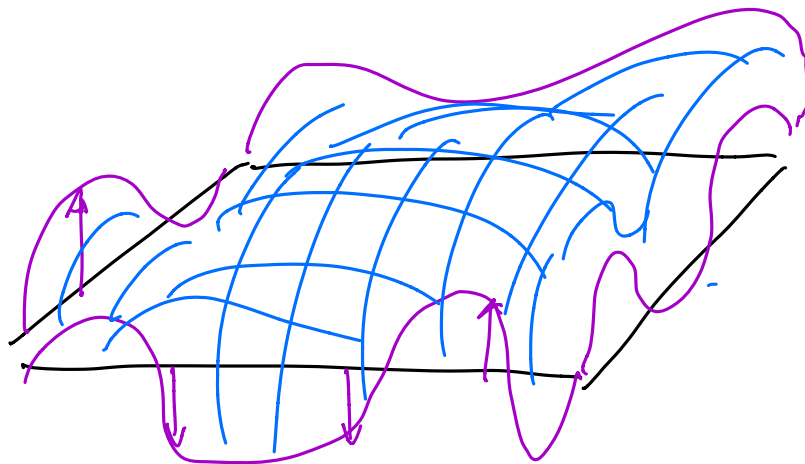
Oblika milnoga mehanika nad žično tambo

- Problem minimalnih plošev

- Naloga: Pravokotni okvir, ki je

v ravnini x_1 , deformiramo v z smeri.

Deformiran okvir potopimo v milnico
in izvlečemo. Tamnina nas obliha
milnice, napeta na deformiran okvir!

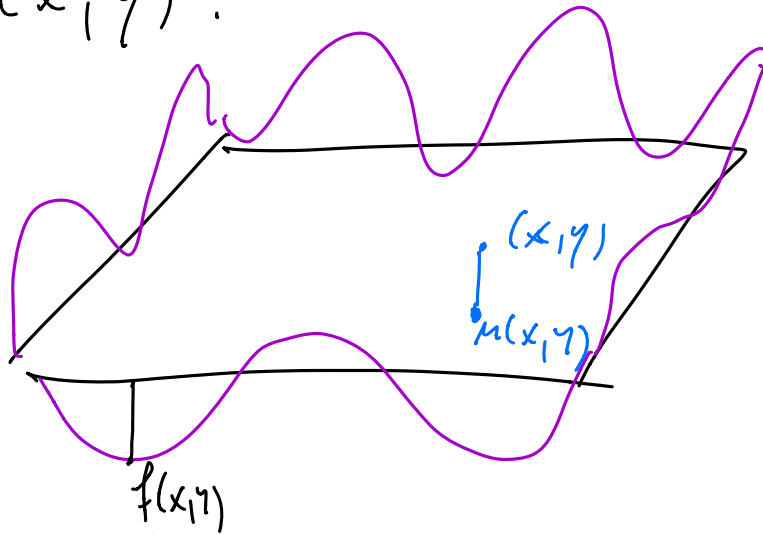


Matematično problem opišemo takole
(če je milnica dovolj lahka in ni
tlačnih valov)

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D = (-a, a) \times (-b, b)$$

$$u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial D$$

$u(x, y)$ je odmrh milnega mehurčka
v točki (x, y) !

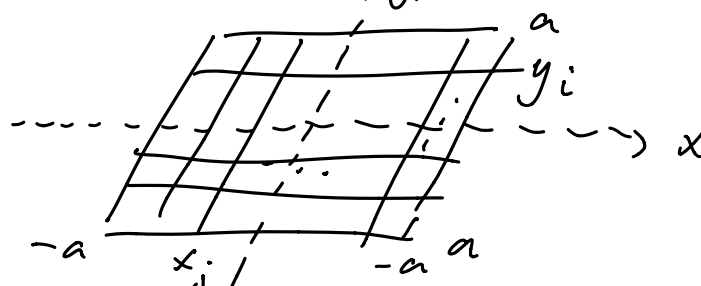


Funkcija f predstavlja vertikalno
deformacijo pravokotnika.

Predpostavimo, da je $a = b$.

Rešitev problema v klasičnem smislu
vedno obstaja (če je f zvezna):

Numerično reševanje



$$-a = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = a$$

$$-a = y_0 < y_1 < \dots < y_m < y_{m+1} = a$$

$$h = \Delta x_j = x_{j+1} - x_j = \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

Na Ω bo μ_{ij} numerični približek

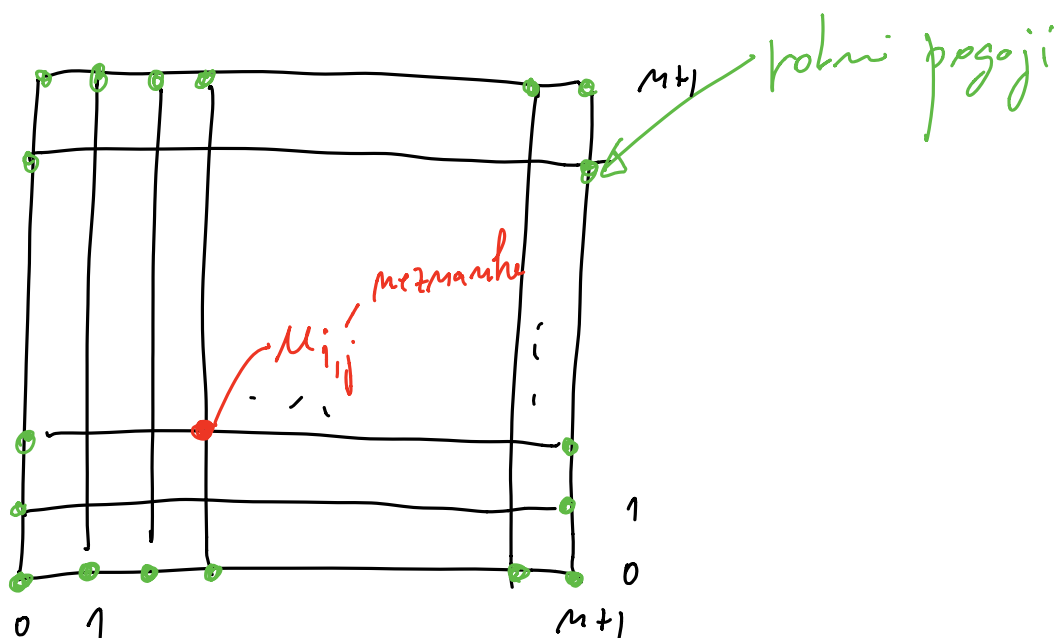
za $\mu(x_j, y_i)$; $i = 0, \dots, m+1$; $j = 0, \dots, m+1$.

Robni pogoji:

$$\mu_{0,j} = f(x_j, -a) \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, m+1,$$

$$\vdots$$

$$\mu_{i,m+1} = f(a, y_i) \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, m+1.$$



- Vrednosti μ_{ij} ; $i, j = 1, \dots, n$ so neznanke, torej imamo n^2 neznanke !!!
- Za te neznanke bomo izpeljali n^2 enačb!
- V vsaki točki (x_j, y_i) zapišemo enačbo

$$\Delta \mu(x_j, y_i) = 0 \quad i, j = 1, \dots, n.$$

$$\mu_{xx}(x_j, y_i) + \mu_{yy}(x_j, y_i) = 0$$

Parcialna odvoda aproksimiramo

s končnimi diferenčami:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}(x_j, y_i) = \frac{\mu(x_{j-1}, y_i) - 2\mu(x_j, y_i) + \mu(x_{j+1}, y_i))}{h^2} + O(h^2)$$

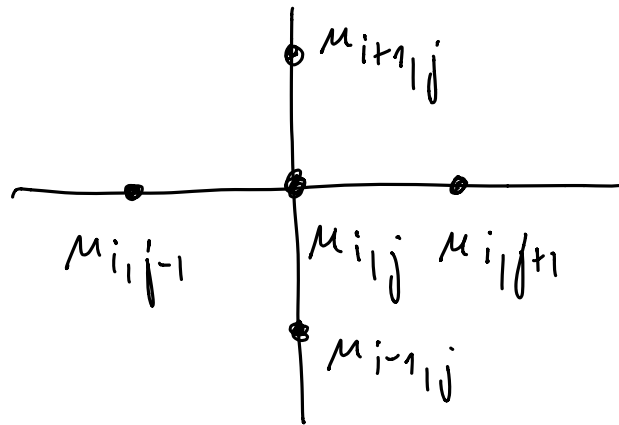
$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}(x_j, y_i) = \dots$$

Aproksimacije vstavimo v enačbo in

preuredimo:

$$\mu_{i-1,j} + \mu_{i,j-1} - 4\mu_{i,j} + \mu_{i,j+1} + \mu_{i+1,j} = 0$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$



Dobili smo n^2 linearnih enačb
za n^2 neznanke.

Če želimo sistem zapisati v matrični
obliki, moramo neznanke $\mu_{i,j}$
številčiti z enim indeksom.

Standardno številčenje je:

$$\mu_{1,1} = \mu_1, \mu_{1,2} = \mu_2, \dots, \mu_{1,n} = \mu_n$$

$$\dots \mu_{m,1} = \mu_{n^2}$$

$$\mu_{m(i-1)+j} = \mu_{i,j}$$

Vektor neznanh je $u = [u_1, \dots, u_m]^T$.

Matrika sistema je A in rešujemo

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$$

Iterativno reševanje

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Jacobijeva metoda:

$$A = S + D + Z; \quad S = \begin{array}{|c|} \hline \diagup \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

$$D = \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

$$Z = \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \quad 0 \\ \hline \end{array}$$

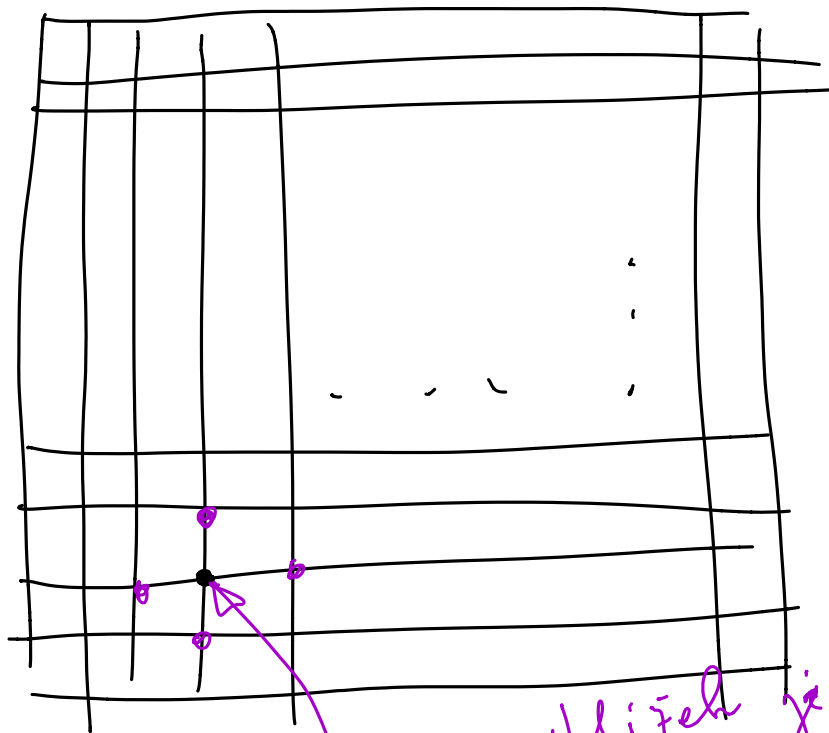
$$Ax = b \Leftrightarrow Dx = b - (S + Z)x$$

Iteracija: $Dx^{(k+1)} = b - (S + Z)x^{(k)}, \quad k=0,1,\dots$

76 komponentah:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Jacobijeva iteracija na mreži



nov približek je
povprečni posledov