

Numerično reševanje navadnih dif. enačb

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_k), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \dots, y_k) \\ &\vdots \\ y_k' &= f_k(x, y_1, \dots, y_k) \end{aligned} \right\} \text{system}$$

Začetni pogoji: $y_1(a) = y_{1a}, \dots, y_k(a) = y_{ka}$

$$Y = [y_1, \dots, y_k]^T, F = [f_1, \dots, f_k]^T \Rightarrow$$

$$Y' = F(x, Y) \text{ in } Y(a) = Y_a$$

Najosnovnejša metoda (Eulerjeva):

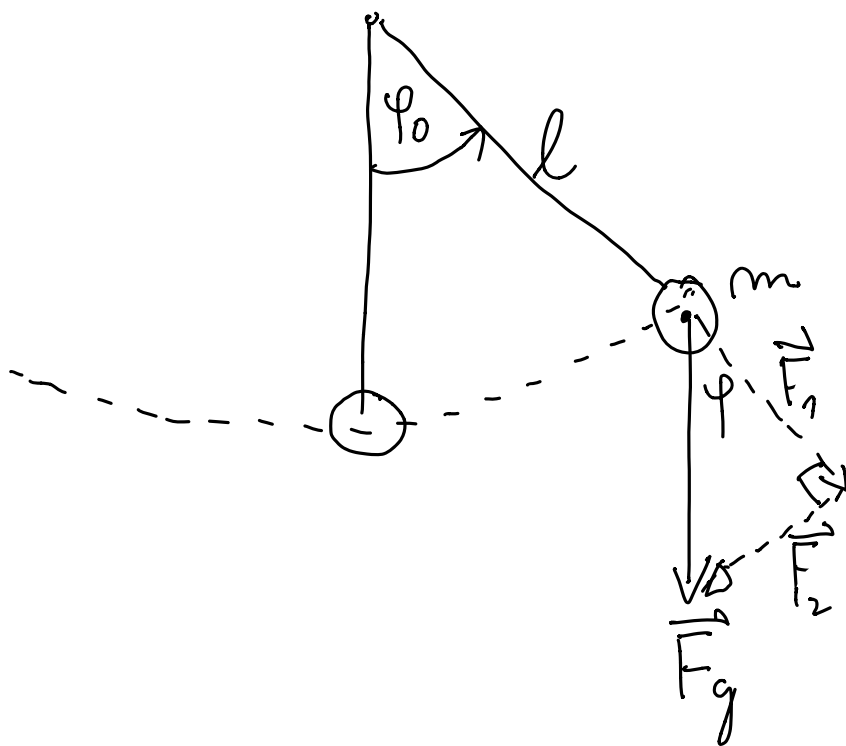
$$Y_0 = Y(a)$$

$$\boxed{X_{n+1} = X_n + h}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + h \cdot F(X_n, Y_n)$$

Nadgradnja: metode Runge-Kutta.

Primer : Matematično nihalo



$$F_2 = mg \sin \varphi \Rightarrow \cancel{mg \sin \varphi} = -\cancel{m} l \ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Če je $\varphi_0 \ll 1$, potem lahko
aproksimiramo $\sin \varphi \approx \varphi \Rightarrow$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \varphi$$

V tem primeru je analitična
rešitev naslednja:

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Splošna rešitev je:

$$\varphi(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

Iz začetnih pogojev dobimo

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)}$$

Kako rešujemo numerično problem matematičnega nihala?

① Dif. enačbo drugega reda prevedemo na sistem prvega reda!

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi ; y_1 = \varphi ; y_2 = \dot{\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{g}{l} \sin y_1$$

$$y_1(0) = \varphi_0$$

$$y_2(0) = 0$$

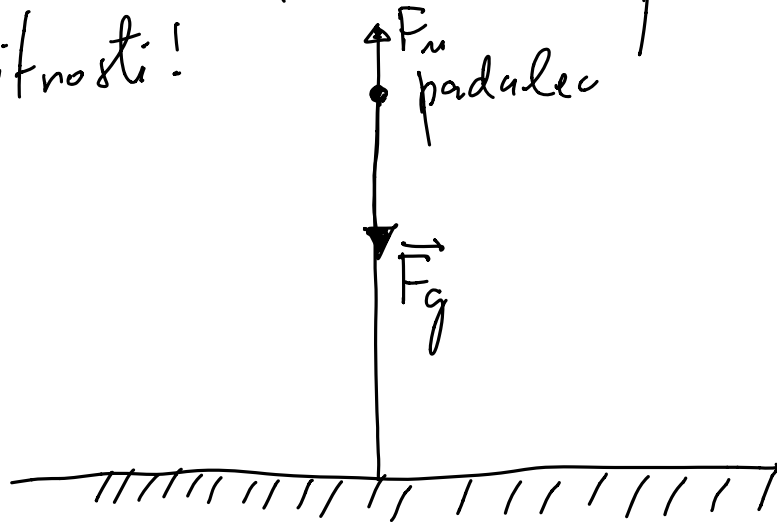
Rešujemo z MATLABOM in ODE45
(ali podobno funkcijo)

Modeliranje prostega pada padalca

① Padalec opazujemo do trenutka, ko se odpre padalo.

② Upoštevaemo kvadratni zhen upor! Upor zraha je sorazmeren z v^2 !

③ Gledamo samo rampično komponento hitrosti!



$y(t)$: višina padalca ob času t
(merjeno od površine)

$\dot{y}(t)$: hitrost

$\ddot{y}(t)$: pospešek

Newtonov zakon: $\downarrow$ teža $\downarrow$ upor zraka

$$m a(t) = -F_g + F_u$$

$$m \ddot{y} = -mg + \underbrace{\text{faktor} \cdot v^2}_{\text{odvisen od neč parametrov}}$$

$$m \ddot{y} = -mg + \frac{1}{2} S \cdot \rho_z c_m v^2$$

$$\ddot{y} = -g + \frac{S \cdot \rho_z c_m}{2m} v^2$$

$$= -g + \frac{S \cdot \rho_z \cdot c_m}{2m} \dot{y}^2$$

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0$$

Premetla na sistem:

$$y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = y_2 \\ \ddot{y}_2 = -g + \frac{S \cdot \rho_z \cdot C_u}{2m} y_2^2 \end{cases}$$

C_u : koeficient upora (odvisen od geometrije helisa).

S : je presek telesa, pravokoten na smer padanja.

ρ_z : prib. 1.3 kg/m^3 ; če je višina zelo velika, moramo gledati ρ_z kot $\rho_z(y)$.

g : $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$, če so višine velike, potem moramo upoštevati $g = g(y)$.