Matematično modeliranje
Vaje: Prosti pad padalca

Modeliramo navpični prosti pad padalca. Gibanje padalca v odvisnosti od časa bo opisovala navadna diferencialna enačba (NDE). Preden se lotimo modeliranja, si oglejmo dva enostavna zgleda, kako numerično rešujemo NDE z začetnimi pogoji v Matlabu.

Naloga 0: predpriprava

V Matlabu imamo vgrajeno metodo `ode45` za reševanje NDE prvega reda,

$$y' = F(t, y),$$

ki sloni na Runge-Kutta (4,5) metodi. Poglejte si dokumentacijo, kako se jo pravilno kliče.

a) Poiščite numerično rešitev $y(t), t \in [0, 5]$, za enačbo

$$y' = 2t, \qquad y(0) = 1$$

in jo primerjajte s točno rešitvijo.

b) Pri reševanju skalarne NDE drugega (višjega) reda prevedemo enačbo na vektorsko enačbo prvega reda in lahko spet uporabimo vgrajeno metodo. Poiščite numerično rešitev $y(t)$ za $t \in [0, 5]$, ki reši enačbo

$$y'' = 6t \ (= f(t, y, y')), \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

in jo primerjajte s točno rešitvijo.

NDE drugega reda prevedemo na prvi red tako, da vpeljemo $y_1 := y$, $y_2 := y'$ in

$$Y := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad Y' = F(t, Y) = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(2) \\ f(t, Y(1), Y(2)) \end{bmatrix}.$$

Naloga 1: padalec

Feliks Vrtnar, svetovni znani padalec in adrenalinski zasvojenec, želi postaviti svetovni rekord v hitrosti v prostem padu[1]. Feliks si je zadal skočiti z balona z višine 40000 m nad tlemi. Pred skokom vas prosi, da opravite numerično simulacijo skoka, iz katerega bi bilo bolj jasno, če bi predviden skok izpolnil njegova visoka pričakovanja.

Za osnovo vzemite simulacijski model, ki ste ga omenili na predavanjih: višino padalca y opisuje enačba

$$y'' = -g - \frac{\rho_z c_u S}{2m} y'|y'|.$$

Vzemite $g_0 = 9.81$ m/s^2 za gravitacijski pospešek na nadmorski višini 0. Upoštevajte, da Feliks skupaj z obleko in vso opremo tehta $m = 105$ kg. Prečna površina padalca v smeri padanja je $S = 1.2$ m^2. Koeficient zračnega upora naj bo $c_u = 1$. Pri vsakem vprašanju rešite diferencialno enačbo z vgrajeno metodo `ode45`. Diskretno rešitev (višino in hitrost v odvisnosti od časa) poiščite na časovnem intervalu $[0, t_K]$, kjer je t_K čas, na katerega se navezuje vprašanje. Rešitev poiščite v 10000 enakomerno izbranih časovnih točkah, vključno z začetno 0 in končno točko t_K. Za vsak primer narišite tud graf višine in hitrosti v odvisnosti od časa.

1) Upoštevajte, da je gostota zraka povsod $\rho_z = 1.225$ kg/m^3 in gravitacijski pospešek konstanten. Čas meritve naj bo 300 s. Kolikšna je povprečna hitrost (aritmetična sredina) padalca, če pri izračunu upoštevate dobljene diskretne numerične vrednosti v 10000 točkah?

   [Rešitev: -37.103943921425703.]

2) Kolikšna je teoretično maksimalna (končna) hitrost padalca, če uporabimo model iz 1)? [Rešitev: -37.435659089009924.]

3) Feliks s prvo simulacijo ni preveč zadovoljen, zato dopolnite simulacijski model. Ker je skok iz precejšnje višine, ne smemo več predpostaviti, da je gravitacijski pospešek neodvisen od višine. Pospešek se z višino spreminja kot $g(y) = g_0 \left(\frac{r}{r+y}\right)^2$, kjer je $r = 6371$ km povprečen radij Zemlje. Kolikšna je višina padalca po 300 s?

   [Rešitev: $2.892887963680784 \cdot 10^4$.]

4) Feliks je v skrbeh, ker rezultati simulacije niso vzpodbudni. Prijatelj meteorolog vam posreduje podatke za gostoto zraka v odvisnosti od višine[2].

višina [m]	0	2000	4000	6000	8000	10000
gostota [kg/m^3]	1.225	1.007	0.8194	0.6601	0.5258	0.4135

višina [m]	15000	20000	25000	30000	40000
gostota [kg/m^3]	0.1948	0.08891	0.04008	0.01841	0.003996

[1] Vsaka podobnost z resničnimi dogodki je naključna.
[2] V resnici so podatki dobljeni s spletne strani: `https://www.engineeringtoolbox.com/`.

Podatke aproksimirajte s polinomom

$$\rho_z(y) = a_0 + a_2 \left(\frac{y-40000}{40000}\right)^2 + a_4 \left(\frac{y-40000}{40000}\right)^4$$

po metodi najmanjših kvadratov (določite parametre a_0, a_2 in a_4) in predpostavite, da se gostota zraka spreminja glede na dobljeno funkcijo ρ_z. Simulacijski model nadgradite s to dodatno predpostavko. Kolikšna je višina padalca po 300 s v tem primeru?

[Rešitev: $4.226372472678798 \cdot 10^3$.]

5) Z dobljenim simulacijskim modelom je Feliks sedaj izredno zadovoljen. Vendar ga zanimajo še dodatne informacije. Koliko bi padalec pridobil na hitrosti po 30 s, če bi se ob skoku z balona odrinil navpično navzdol s hitrostjo -3 m/s, v primerjavi s skokom brez odriva?

[Rešitev: -2.251586442889391.]

6) Koliko časa preteče, ko padalec prvič doseže hitrost 300 m/s (pri skoku brez odriva)? Rešitev poiščite tako, da definirate novo funkcijo `fun1`, ki preko klica funkcije `ode45` za vhodni podatek t_K vrne hitrost ob času t_K. Nato uporabite vgrajeno funkcijo `fzero`, da poiščete ničlo funkcije `fun2`, ki ima ničlo ravno pri tistem argumentu, pri katerem ima `fun1` vrednost 300.

[Rešitev: 34.81280761423394.]