

NEDOLOČENI INTEGRAL

DEF:

FUNKCIJA $F(x)$ PREDSTAVLJA NEDOLOČENI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x)$, ČE ZANJU VELJA ZVEZA $F'(x) = f(x)$

OZNAKA: $F(x) = \int f(x) dx$

KOMENTAR: GRE ZA OPERACIJO, KI JE OBRATNA OD ODVAJANJA, Vendar PA TUDI BISTVENO MANJ OBVLADLJIVA t.j. ČEPRAV ZNAMO NAČELOMA ODVAJATI VSAKO ELEMENTARNO FUNKCIJO, ZNAMO INTEGRAL DOLOŽITI LE ZA FUNKCIJE, KI SO 'POSEBEJ LEPE'. ŠE VEČ, ZGODI SE LAHKO, DA JE INTEGRAL ELEMENTARNE FUNKCIJE NEELEMENTARN. NPR.

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx \text{ JE NEELEMENTARNA FUNKCIJA.}$$

OPOMBA:

KER JE ODDOD KONSTANTNE FUNKCIJE NIČELN, NEDOLOČEN INTEGRAL NIKOLI NI ENDLIČEN.

NPR. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R},$

↑ POLJUBNA KONSTANTA

ŠE VEČ, ČE NE VZTRAJAMO, DA NAJ BO Df POVEZANO, LAHKO DOBIMO DVE RAZLIČNI FUNKCIJI

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C \quad \text{in} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2} + C, \quad x \neq \pm 1.$$

NALOGA! PONOVI TABELO INTEGRALOV OSNOVNIH FUNKCIJ IN PRAVILA ZA INTEGRACIJO.

NALOGA: IZRAČUNAJ NEDOLOŽENE INTEGRALE.

(a) $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x'} dx$ (b) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ (c) $\int 2^x \cdot 3^{x-2} dx$

REŠITEV:

(a) INTEGRALA PRODUKTA DVEH FUNKCIJ NE ZNAMO IZRAČUNATI, VEMO PA, DA JE $\int f+g dx = \int f dx + \int g dx$ IN DA JE $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ ZA $a \neq -1$.

$$\begin{aligned} \int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x'} dx &= \int (1 - x^{-2}) \cdot x^{\frac{3}{4}} dx = \\ &= \int x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}} dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = \\ &= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4 x^{-\frac{1}{4}} + C. \end{aligned}$$

(b) INTEGRALA OD KVOCIENTA NE ZNAMO IZRAČUNATI, ZATO INTEGRAND PRETVORIMO V VSOTO!

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= x - \arctg x + C \end{aligned}$$

(c) PODOSTA NAPAKA: ~~$\int a^x dx = \frac{a^{x+1}}{x+1} + C$~~
PRAVILNO: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

$$\begin{aligned} \int 2^x \cdot 3^{x-2} dx &= \int 2^x \cdot 3^x \cdot 3^{-2} dx = \frac{1}{9} \int 6^x dx \\ &= \frac{1}{9} \frac{6^x}{\ln 6} + C \end{aligned}$$

VEDBA NOVE SPREMENLJIVKE: VSAD DELNO

ČE ŽELIMO $\int f(x) dx$ ZAPISATI V NOVI SPREMENLJIVKI, ZA KATERO VELJA $x = g(t)$ KJER JE g BIJEKTIVNA, MORAMO ZAMENJATI TUDI INFINITEZIMALNI KOLIČNIK $dx = g'(t) dt$.

V PRAKSI: IMAMO POHOTO TUDI IZRAŽENO $t = h(x)$ IN VELJA $dt = h'(x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{h'(h^{-1}(t))}$.

KLJUČNO VPRAŠANJE, NA KATERO PA NIMAMO DOBREGA ODGOVORA V SPLOŠNEM, PA JE: "KAJ UZETI ZA SPREMENLJIVKO?"

NALOGA: Z UVEDBO NOVE SPREMENLJIVKE IZRAČUNAJ:

(a) $\int \frac{x dx}{1+x^4}$ (b) $\int \frac{dx}{g+4x^2}$ (c) $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx$ (d) $\int \frac{e^{x-1}}{e^x+1} dx$

REŠITEV:

PRVI POSKUS ZA (a): ZNEBITI SE SKUŠAJMO ULONKA:

$$t = 1+x^4 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{t-1}$$

$$dt = 4x^3 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4(\sqrt[4]{t-1})^3}$$

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \int \frac{dt}{4\sqrt[4]{t-1} \cdot t}$$

TA INTEGRAL JE BOLJ ZAPLETEN KOT PRVI.

DRUGI POSKUS:

$$t = x^4 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{t}$$

$$dt = 4x^3 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{4\sqrt[4]{t^3}}$$

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \int \frac{\sqrt[4]{t}}{(1+t)} \cdot \frac{dt}{4\sqrt[4]{t^3}} = \int \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$$

ISTI PROBLEM.

PRAVA POT:

$$t = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{t}$$

$$dt = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \int \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \arctan t + C = \frac{1}{2} \arctan x^2 + C$$

VEDNO ZAPIŠEMO INTEGRAL
V OSNOVNI SPREMENLJIVKI.

KAJ JE BILO KLJUČNO:

$$dt = 2x dx$$

TO SMO IMELI ŽE
V OSNOVNEM INTEGRALU
IN SE JE NADOMESTILO Z $\frac{dt}{2}$

$$\int \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$(b) \int \frac{dx}{9+4x^2}$$

IDEJA: Z NOVO SPREMENLJIVKO PRETI NA
INTEGRAL $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$.

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1+\frac{4x^2}{9}} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1+(\frac{2x}{3})^2}$$

$$t = \frac{2x}{3} \quad = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$dt = \frac{2}{3} dx \quad = \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

$$dx = \frac{3}{2} dt$$

$$(c) \int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx$$

PROBLEM: IZRAZ V IMENOVALCU JE DVOČLENIK. RAJE BI GA IMELI V ŠTEVCU, KJER GA RAZBIJEMO NA VSOTO.

$$t = x - 1 \Rightarrow dt = dx \quad \text{in} \quad x = t + 1$$

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx = \int \frac{(t+1)^2 dt}{t^{100}} = \int \frac{t^2 + 2t + 1}{t^{100}} dt =$$

$$= \int (t^{-98} + 2t^{-99} + t^{-100}) dt =$$

$$= \frac{t^{-97}}{-97} + 2 \frac{t^{-98}}{-98} + \frac{t^{-99}}{-99} + C =$$

$$= -\frac{1}{97} \cdot \frac{1}{(x-1)^{97}} - \frac{1}{49} \frac{1}{(x-1)^{98}} - \frac{1}{99} \frac{1}{(x-1)^{99}} + C.$$

$$(d) \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

STANDARDEN TRIK: $t = e^x \Rightarrow dt = \boxed{e^x} dx = \boxed{t} dx$
 TO JE KLJUČNO

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{t - 1}{t + 1} \cdot \frac{dt}{t}$$

OD TU DALJE SI POMAGAMO S t.i. PARCIALNIMI ULOMKI:

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} = \frac{At + Bt + B}{t(t+1)} = \frac{t-1}{t(t+1)}$$

PRIMERJAMO KOEFICIENTE:

$$\begin{array}{l} t: A + B = 1 \\ 1: \boxed{B = -1} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} t: A + B = 1 \\ 1: B = -1 \end{array}} \right\} \boxed{A = 2}$$

$$\int \frac{t-1}{(t+1) \cdot t} dt = \int \frac{2}{t+1} dt - \int \frac{dt}{t} = 2 \ln|t+1| - \ln|t| + C$$

$$= 2 \ln(e^x+1) - \ln e^x + C = 2 \ln(e^x+1) - x + C$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
 ABSOLUTNA VREDNOST
 NI POTREBNA

NALOGA: Z UVEDBO NOVE SPREMENLJIVKE INTEGRIRAJ:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$ (b) $\int \sqrt{16-x^2} dx$ (c) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

REŠITEV:

(a) VZAMEMO 'SKUPNI IMENOVALEC' KORENOV t.j.

$$t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} dx = \frac{1}{6} t^{-5} dx$$

$$dx = 6t^5 dt, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2$$

Ključno, da se da vse izraze izraziti z t

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1+t^2)} = 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt =$$

$\uparrow$
 (b) PRIMER IZ
 PRVE NALOGE

$$= 6t - 6 \arctg t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C.$$

(b) $\int \sqrt{16-x^2} dx$

NAMIG: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ oz. $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$.

ČE ZNAMO IZRAZ POD KORENJOM PREVESTI

NA TO IDENTITETO, KOREN IZGANE.

$$\int \sqrt{16-x^2} dx = 4 \int \sqrt{1-\frac{x^2}{16}} dx = 4 \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}$$

$$\frac{x}{4} = \sin t \Rightarrow x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{16-x^2} dx &= 4 \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = \\ &= 16 \int \cos^2 t dt \end{aligned}$$

STANDARDEN TRIK: ČE IMAMO $\cos^2 t$ ALI $\sin^2 t$, UPORABIMO

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{16-x^2} dx &= 16 \cdot \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = 8 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = \\ &= 8 \arcsin \frac{x}{4} + 4 \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{4} \right) + C \quad \int \cos 2t dt = \frac{\sin 2t}{2} + C \end{aligned}$$

DOMAČA NALOŽA:

POENOSTAVI $\sin(2 \arcsin \frac{x}{4})$ Z UPORABO FORMUL ZA DVOJNE KOTE, $\sin(\arcsin \frac{x}{4})$ IN $\cos(\arcsin \frac{x}{4})$.

$$(c) \int \sqrt{1+x^2} dx$$

NAMIG: PODOBNA IDEJA ZA IDENTITETO

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \Rightarrow \cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$$

$$x = \operatorname{sh} t \Rightarrow dx = \operatorname{ch} t dt$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{ch}^2 t dt =$$

$$= \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt = \frac{1}{4} \int (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t}}{2} + 2t + \frac{e^{-2t}}{-2} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\operatorname{sh}(2t) + 2t \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2 \operatorname{ars} h(x)) + \frac{1}{2} \operatorname{ars} h(x) + C$$

DOMAČA NALOŽBA:

{ POENOSTAVI $\operatorname{sh}(2 \operatorname{ars} h(x))$