

Fourierjeva vrsta

Klasična trigonometrijska Fourierjeva vrsta

Naj bo f funkcija, ki je integrabilna na $(-\pi, \pi)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(nx)$$

Lastnosti (če je f odsekoma zvezna funkcija):

- $\tilde{f}$ je periodična s periodo 2π
- $\tilde{f}(\pi) = \tilde{f}(-\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \nearrow \pi} f(x) + \lim_{x \searrow -\pi} f(x) \right)$
- v točkah zveznosti f iz $(-\pi, \pi)$ se f in $\tilde{f}$ ujemata
- v točkah nezveznosti f iz $(-\pi, \pi)$ velja $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \nearrow x} f(y) + \lim_{y \searrow x} f(y) \right)$
- **Parsevalova enačba:** $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

Naloge

1. $f(x) = \sin^4 x$

a) Funkcijo f razvij v trigonometrijsko Fourierjevo vrsto na $[-\pi, \pi]$

b) Za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ izračunaj $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4(x) \cos(nx) dx$.

c) Izračunaj $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^8 x dx$.

2. Naj bo $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$.

a) Funkcijo f razvij v trigonometrično Fourierjevo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

b) Za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ izračunaj $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ in $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

3. Naj bo $f(x) = x^2$.

a) Funkcijo f razvij v trigonometrično Fourierjevo vrsto na $[-\pi, \pi]$.

b) Izračunaj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

c) Izračunaj $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

d) Nariši graf Fourierove vrste kot funkcije na $\mathbb{R}$.

4. Razvij $f(x) = \pi + x$ v trigometrijsko (klasično) Fourierjevo vrsto ter nariši graf Fourierove vrste kot funkcije na $\mathbb{R}$.

5. Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} x; & -\pi < x \leq 0, \\ 1; & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

razvij v trigonometrijsko Fourierjevo vrsto ter nariši graf Fourierove vrste kot funkcije na $\mathbb{R}$.

Fourierjeva vrsta na poljubnem intervalu

Naj bo f funkcija, ki je integrabilna na (u, v) .

$$a_0 = \frac{2}{v-u} \int_u^v f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{v-u} \int_u^v f(x) \cdot \cos\left(\frac{2\pi nx}{v-u}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{v-u} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi nx}{v-u}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{f} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{v-u}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{v-u}\right)$$

Lastnosti (če je f odsekoma zvezna funkcija na (u, v)):

- $\tilde{f}(u) = \tilde{f}(v) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \downarrow u} f(y) + \lim_{y \uparrow v} f(y) \right)$
- v točkah zveznosti f iz (u, v) se f in $\tilde{f}$ ujemata
- v točkah nezveznosti f iz (u, v) velja $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \downarrow x} f(y) + \lim_{y \uparrow x} f(y) \right)$
- Parsevalova enačba: $\int_u^v |f(x)|^2 dx = \frac{v-u}{4} a_0^2 + \frac{v-u}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

Naloge

6. Funkcijo f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

razvij v Taylorjevo vrsto na $[0, 2]$.

Kosinusna Fourierjeva vrsta

Naj bo f funkcija, ki je integrabilna na $(0, \pi)$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \, dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \cos(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx)$$

Lastnosti (če je f odsekoma zvezna funkcija):

- $\tilde{f}$ je soda funkcija
- $\tilde{f}$ je periodična s periodo 2π
- $\tilde{f}(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x)$, $\tilde{f}(\pi) = \lim_{x \nearrow \pi} f(x)$
- v točkah zveznosti f iz $(0, \pi)$ se f in $\tilde{f}$ ujemata
- v točkah nezveznosti f iz $(0, \pi)$ velja $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \nearrow x} f(y) + \lim_{y \searrow x} f(y) \right)$
- **Parsevalova enačba:** $\int_0^\pi |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{4} a_0^2 + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

Naloge

7. Razvij $f(x) = x$ v kosinusno Fourierovo vrsto.

8. Razvij $f(x) = \sin x$ v kosinusno Fourierovo vrsto.

Sinusna Fourierjeva vrsta

Naj bo f funkcija, ki je integrabilna na $(0, \pi)$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(nx) \, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos(nx)$$

Lastnosti (če je f odsekoma zvezna funkcija):

- $\tilde{f}$ je liha funkcija
- $\tilde{f}$ je periodična s periodo 2π
- $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\pi) = 0$
- v točkah zveznosti f iz $(0, \pi)$ se f in $\tilde{f}$ ujemata
- v točkah nezveznosti f iz $(0, \pi)$ velja $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \left(\lim_{y \nearrow x} f(y) + \lim_{y \searrow x} f(y) \right)$
- **Parsevalova enačba:** $\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty b_n^2$

Naloge

9. Funkcijo $f(x) = 1 - x$ razvij na $[0, \pi]$ v Fourierovo vrsto po samih sinusih.

10. Naj bo $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, podana s predpisom $f(x) = x(\pi - x)$

a) Funkcijo f razvij po sinusih.

b) Izračunaj $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3}$

c) Izračunaj $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \dots = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^6}$

Rešitve

1 a) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4(x) \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} & n = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & n = 2 \\ \frac{\pi}{8} & n = 4 \\ 0 & n \neq 0, 2, 3 \end{cases}$

c) $\frac{75\pi}{128}$

2 a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$.

b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}\pi}{2} & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$

3 a) $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

4 $\pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$

5 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n(1+\pi)}{\pi n} \sin(nx)$

6 $\frac{1}{2} + \frac{2}{(\pi n)^2} \sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^n - 1) \cos(\pi n x)$

7 $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$

8 TODO

9

10 TODO