# Numerično reševanje nelinearnih enačb

Zakaj numerično reševanje?

- polinomske enačbe st. $\geq 5$,
- enačba (funkcija, ki jo določa) v splošnem ni podana,

⋮

Primer: Določanje časa v dnevu, ko je temperatura (prvič) dosegla neko vrednost.

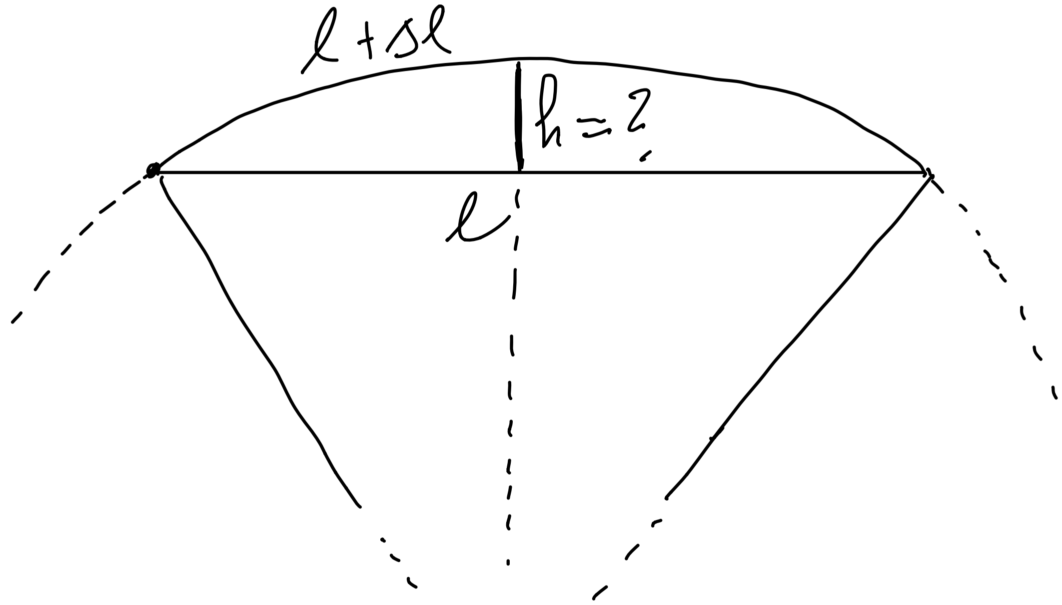
Reševali bomo $f(x) = 0$, $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ali pa sistem

$$F(x) = 0, \quad F: D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d.$$

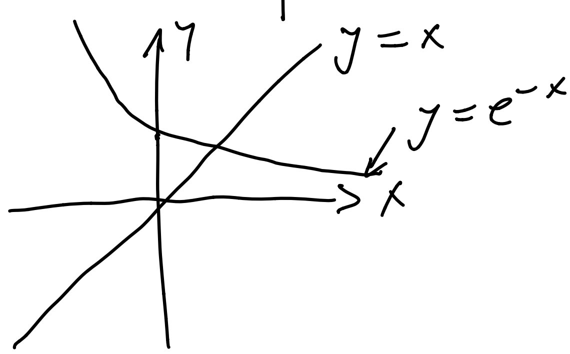
Število $x$, za katerega je $f(x) = 0$, bomo rekli rešitev enačbe $f(x) = 0$, oz. ničla funkcije $f$.

**Primer**: Imamo $l$ metrov dolgo tračnico, ki je vpeta na obeh koncih. Zaradi segrevanja se raztegne na dolžino $l + \delta l$ in usloči v obliki krožnega loka. Zanima nas koliko se tračnica dvigne na sredini.




Koliko rešitev ima $f(x) = 0$ ?

- $e^{-x} - x = 0$,

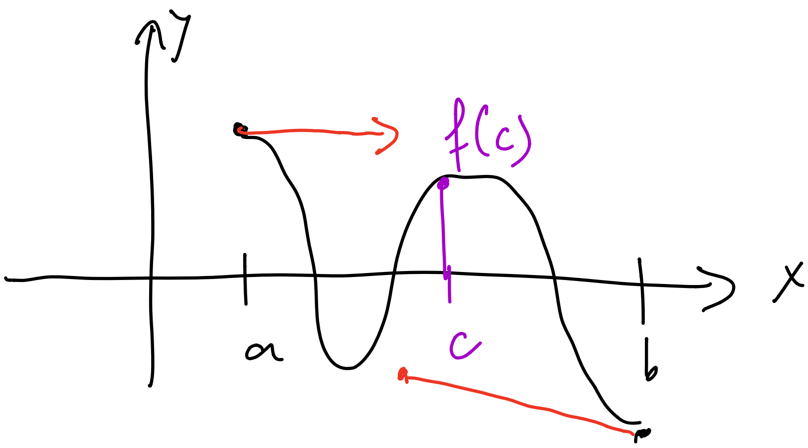



ena rešitev,

- $x - \operatorname{tg} x = 0$, neskončno rešitev

- $x^3-6x^2+11x-6=0$, tri realne rešitve
- $x^4+1=0$, nima realnih rešitev,
- $p(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$.

<u>Izrek</u>: Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija in $f(a)f(b)<0$. Potem ima $f$ na $[a,b]$ vsaj eno ničlo.




## Metoda bisekcije:

$$c=\frac{a+b}{2},$$

$f(c)f(a)<0 \Rightarrow b=c$

$f(c)f(a)>0 \Rightarrow a=c$

$f(c)=0 \Rightarrow$ končamo (teoretično)

V praksi končamo, ko je $|b-a| \leq \varepsilon$.

Ničla je vedno na $[a, b]$.

Koliko korakov potrebujemo za določeno natančnost?

$$\frac{\overbrace{|b-a|}^{\text{osnovni interval}}}{2^k} < \varepsilon$$

$$\boxed{k > \log_2 \frac{|b-a|}{\varepsilon}}$$

Primer: $|b-a| = 1$ in $\varepsilon = 10^{-10}$

$$k > \log_2 \frac{1}{10^{-10}} = \log_2 10^{10}$$

$$= 10 \log_2 10 \approx 33{,}2$$

Navadna iteracija

Ideja: $f(x) = 0$ pretvorimo v ekvivalentno obliko $x = g(x)$.

Računamo člene zaporedja

$$x_{r+1} = g(x_r), \quad x_0 \text{ izberemo}$$

Če $\lim_{r \to \infty} x_r = \alpha$, je $\alpha = g(\alpha)$

fiksna (ali negibna) točka $g$ in hkrati rešitev $f(x) = 0$.

Kako določiti ustrezno funkcijo $g$?

- $g(x) = x - f(x)$,
- $g(x) = x - c f(x)$, $c \neq 0$,
- $g(x) = x - h(x) f(x)$, $h(x) \neq 0$.

<u>Primer</u>: Poiščimo nekaj iteracijskih funkcij $g$ za reševanje enačbe

$$p(x) = x^3 - 5x + 1 = 0.$$

a) $$g_1(x) = \frac{x^3 + 1}{5},$$

b) $g_2(x) = \sqrt[3]{5x+1}$,

c) $g_3(x) = \dfrac{1}{5-x^2}$.

<u>Izrek</u>: Naj iteracijska funkcija $g$ na intervalu $I = [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ zadošča pogoju

$$|g(x)-g(y)| \leq m\,|x-y|,$$

$$x, y \in I, \quad 0 \leq m < 1.$$

Potem za $\forall x_0 \in I$ zaporedje

$$x_{r+1} = g(x_r), \quad r = 0, 1, \dots$$

konvergira k $\alpha$. Velja

$$|x_r - \alpha| \leq m^r\,|x_0 - \alpha|$$

in $$|x_{r+1} - \alpha| \leq \frac{m}{1-m}\,|x_r - x_{r-1}|.$$

Posledica: Naj bo $g(\alpha)=\alpha$ in $g$ zvezno odvedljiva pri $\alpha$. Če je $|g'(\alpha)|<1$, potem obstaja okolica $I$ za $\alpha$, da za $\forall x_0 \in I$

$$x_{r+1} = g(x_r), \quad r=0,1,\dots$$

konvergira k $\alpha$.

Točka $\alpha$ za katero je $g(\alpha)=\alpha$ in $|g'(\alpha)|<1$ je privlačna, če pa je $|g'(\alpha)|>1$, pa je odbojna.

Kako je s hitrostjo konvergence?

Def.: Naj zaporedje $(x_r)_{r=0}^{\infty}$ konvergira k $\alpha$. Pravimo, da je red konvergence ima $p>0$, če obstajata konstanti $C_1, C_2 > 0$, da za pozne člene reda

$$C_1 |x_r - \alpha|^p \leq |x_{r+1} - \alpha| \leq C_2 |x_r - \alpha|^p.$$

<u>Lema</u>: Naj bo $g$ v okolici <u>negibne točke</u> $\alpha$ $p$-krat zvezno odvedljiva in naj bo $|g^{(k)}(\alpha)| = 0$, za $k = 1, 2, \dots, p-1$, ter $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Potem ima iterativna metoda $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \dots,$ v bližini rešitve $\alpha$ red konvergence $p$.

- $p = 1$; linearna (na vsakem koraku konstantno mnogo novih točnih mest),
- $p = 2$; kvadratična (na vsakem koraku se število točnih mest <u>podvoji</u>)
- $p = 3$; kubična (...)

- $1 < p < 2$ ; superlinearna.