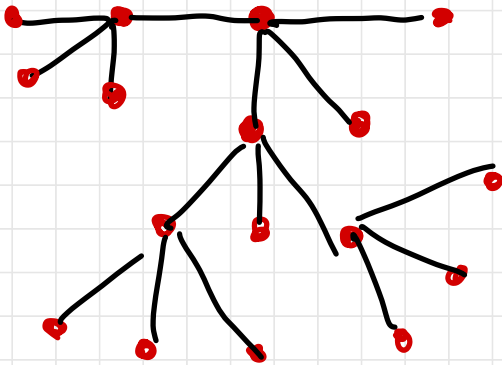


DS2 VAJE 5

1. NAJ BO T DREVO S 17 VOZLIČI, IN VSA SO STOPNJE 1 IN 4, KOLIKO JE VOZLIŠČ STOPNJE 4?



$$|V(T)| = |E(T)| + 1 \rightarrow |E(T)| = 16$$

$$\sum_{v \in V(T)} \deg(v) = 2 \cdot |E(T)|$$

$$n_1 \cdot 1 + n_4 \cdot 4 = 2 \cdot |E(T)| = 32$$

ŠT. VOZLIŠČ
ST. 1

$$n_1 + n_4 = |V(G)| = 17$$

$$\Rightarrow 3 \cdot n_4 = 15 \Rightarrow n_4 = 5$$

2. T DREVO Z VSAJ 2 VOZLIŠČEMA.

DANA SO ŠTEVILA n_i ZA $i=2,3,\dots$

n_i - ŠTEVILLO VOZLIŠČ STOPNJE i . KOLIKO
LISTOV IMA T ?

$$\sum_{v \in V(T)} \deg(v) = 2 \cdot |E(T)|$$

$$1 \cdot n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + kn_k = 2|E(T)|$$

↑
ŠT. LISTOV

$$|E(T)| + 1 = |V(T)|$$

$$2|V(T)| \quad (*)$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = |V(T)| \quad (**)$$

$$2 \cdot (**) - (*):$$

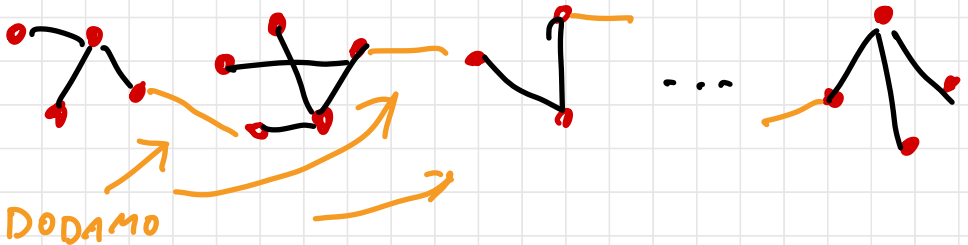
$$n_1 - n_3 - 2n_4 - \dots - (k-2) \cdot n_k = 2$$

$$n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \dots + (k-2) \cdot n_k$$

3. GOZD JE GRAF, KATEREGA POVEZANE
KOMPONENTE SO DREVEŠA. KOLIKO POVEZAV
IMA GOZD Z n VOZLIŠČI IN k
KOMPONENTAMI.

$$|E(G)| = n - k$$

RECIMO, DA IMAMO G GOZD Z n VOZLIŠČI
IN k KOMPONENTAMI. POSTAVIMO KOMPONENTE
V VRSTO!



POVEZAVE MED i -TO IN $i+1$ KOMPONENTO

$\Rightarrow$ DOBIMO DREVO

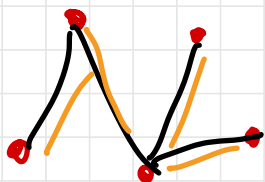
NOV GRAF IMA $|E(G)| + k - 1$ POVEZAV

KER NOV GRAF DREVO, $|E(G)| + k - 1 = n - 1$

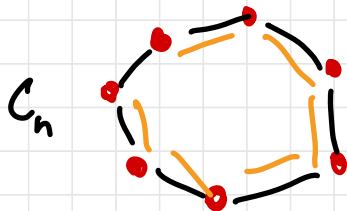
$$\Rightarrow |E(G)| = n - k$$

4. DOLOČI ŠTEVILLO VPETIH DREVES GRAFA, KI JE:

- DREVO
- CIKEL C_n
- G_{2n} , GRAF, KI GA DOBIMO, ČE CIKLU C_{2n} DODAMO DIAGONALO

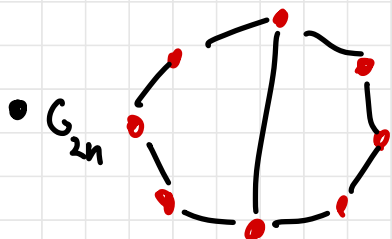


⇒ EN TAK PODGRAF



⇒ n MOŽNOSTI ZA ODSTRANJE POVEZAVO

⇒ n VPETIH DREVES



- 1. MOŽNOST: ODSTRANIMO 1 POVEZAVO NA "LEVI" STRANI CIKLA IN 1 NA "DESNI"
 n^2 MOŽNOSTI

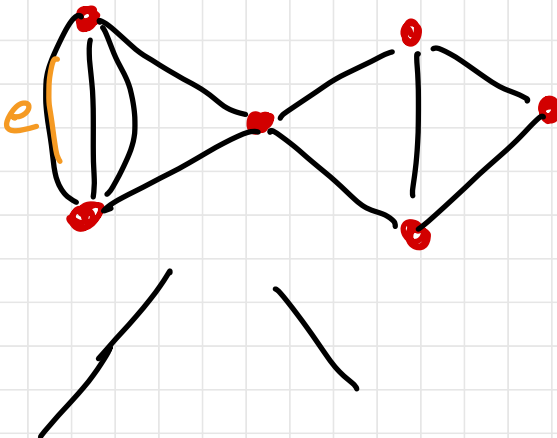
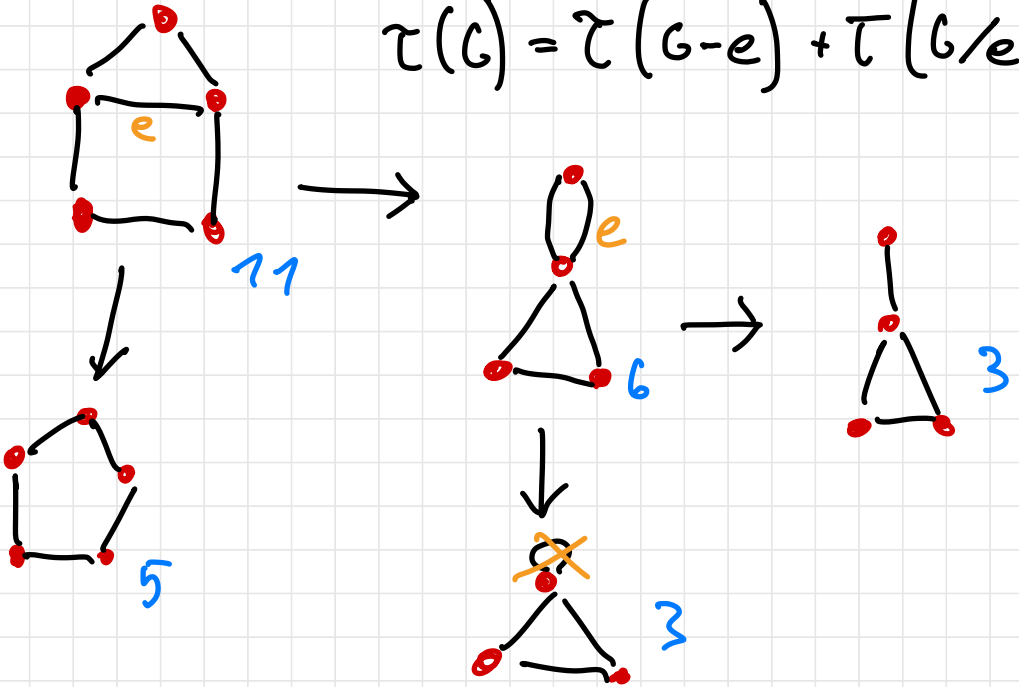
- 2. MOŽNOST: ODSTRANIMO DIAGONALO + 1 NA CIKLU

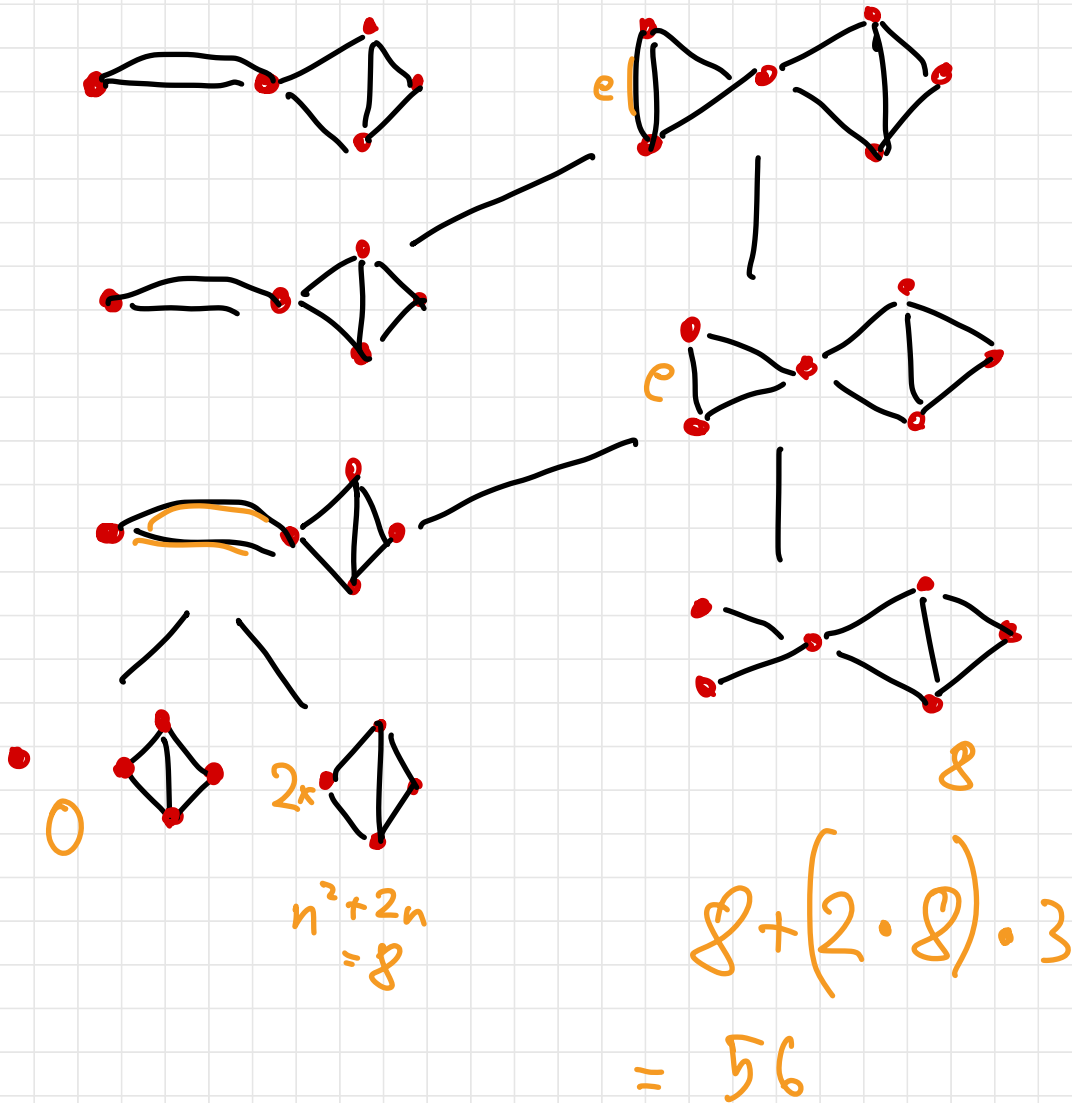
$2n$ možnosti

$\Rightarrow n^2 + 2n$ VPEŤIH DREVEJ

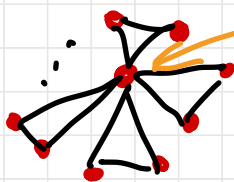
5. IZRAČUNAJ ŠTEVIKO VPEŤIH DREVEJ:

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$$





6. G_n GRAF, KI GA DOBIMO TAKO, DA
 ŠTAKNEMO n TRIKOTNIKOV V
 ENEM VOZLIŠČU. $\tau(G_n) = ?$



PREREZNO VOZLIŠČE

$$\Rightarrow \tau(G_n) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 = 3^n$$

2A VSAK BLOK
IZPEREM DREVO

NEODVISNO

7. Poišči $\tau(K_{2,n})$

$$L(G) = \begin{bmatrix} \deg(v_1) & & & 0 \\ & \deg(v_2) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \deg(v_n) \end{bmatrix} - A(G)$$

MATRIKA
SOSEDNOSTI

$$L(K_{2,n}) = \begin{bmatrix} n & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$T(K_{2,n}) = \begin{vmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & 0 & 0 & & 2 \end{vmatrix} =$$

RAZVIJEM PO 2. VRETKI

$n+1$ STOLPCEV

$$\downarrow \\ = - \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & & 2 \end{vmatrix} \right) +$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & & & \\ -1 & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & & & & 2 \end{vmatrix} =$$

n STOLPCEV

$$= -2^{n-1} + 2 \cdot \left(- \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2 \end{vmatrix} \right) + \right.$$

$$\left. 2 \cdot \begin{vmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & & \\ \vdots & & 2 & \\ -1 & & & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$n-1$ STOLPCEV

$$= \underbrace{-2^{n-1} - 2^{n-1} - 2^{n-1} - \dots - 2^{n-1}}_n + 2^n \cdot n =$$

$$= -2^{n-1} \cdot n + 2^n \cdot n = 2^{n-1} \cdot n$$

8. $A(G)$... MATRIKA SOSEDNOSTI G

DOKAŽI, DA $(A(G)^n)_{ij}$ POVE
KOLIKO JE SPREHODO IZ i V j
DOLŽINE n .

DOKAZ Z INDUKCIJO NA n :

$n=1$

$$A(G)_{ij}$$

$=$

$$S_{ij}^1$$

ŠTEVILU POŠ
DOLŽINE 1 MED
 i IN j

1 ČE OBSTAJA

POVEZAVA MED i IN j



$$n \rightsquigarrow n+1$$

$$\stackrel{\text{I.P.}}{=} \left(A(G)^{n+1} \right)_{ij} = \left(A(G) \cdot A(G)^n \right)_{ij} =$$

$$= \left(A(G) \cdot \begin{bmatrix} s_{11}^n & s_{12}^n & \dots & s_{1k}^n \\ s_{21}^n & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ s_{k1}^n & \dots & \dots & s_{kk}^n \end{bmatrix} \right)_{ij} =$$

$$= \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot s_{lj}^n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

$$a_{il} = 1 \iff i \text{ in } l \text{ SOSEDA}$$

= ŠTEVILLO POTI DOLŽINE n OD
 i DO SOSEDOV j

$$= s_{ij}^{n+1} \quad \text{ŠTEVILLO POTI DOLŽINE } n+1 \text{ OD } i \text{ DO } j$$

KAKO BI PREŠTELI ŠTEVLO
TRIKOTNIKOV V G ?

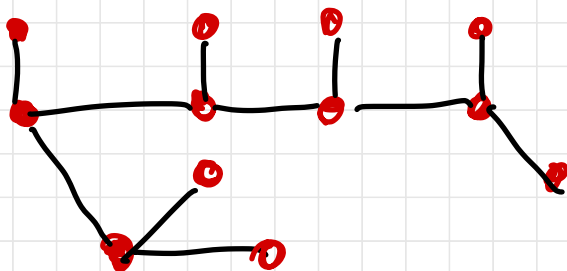
$$\frac{S_{ii}^3}{2} \text{ — KOLIKO JE TRIKOTNIKO INCIDENCA}$$

$$\text{VSEH TRIK.: } \left(\sum_{i=1}^k \frac{S_{ii}^3}{2} \right) / 3 =$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(A(G)^3 \right)_{ii} / 6 = \frac{\text{tr}(A(G)^3)}{6}$$

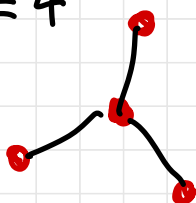
9. T DREVO, V KATEREM IMAJO VSA
VOZLIŠČA, KI SO SOSEDNJA S KAKŠNIM
LISTOM STOPNJO VSAJ 3.

DOKAŽI, DA T VSEBUJE PAR
LISTOV S SKUPNIM SOSEDOM.



INDUKCIJA NA n - ŠTEVLO VOZLIŠČ

$n = 4$



← EDINI TAK GRAF

✓

$n \rightarrow n+1$

- RECIMO, DA IMAMO DREVO Z $n+1$ VOZLIŠČI IN VOZLIŠČA, KI SO SOSEDNA Z LISTOM IMAJO STOPNJO VSAJ 3.
- ODSTRANIMO LIST n :
 - V NOVEM GRAFU OBSTAJA VOZLIŠČE n SOSEDNA LISTU, KI IMA STOPNJO ≤ 2
 - $\Rightarrow n$ SOSEDEN n IN JE ENEMU LISTU
 - $\Rightarrow$ OBSTAJATA n IN JE EN LIST
 - KI STA SOSEDNA n ✓
- V NOVEM GRAFU VELJA, DA SO VSA VOZLIŠČA SOSEDNA LISTOM STOPNJE VSAJ 3.

$\Rightarrow$ Po I.P. obstajata lista
s skupnim sosedom

$\Rightarrow$ velja tudi v zač. grafu
✓