

Karakterizacija homogenega Poissonovega procesa

Izrek 1. Naj bo $\lambda > 0$ dano realno število in $(N_t)_{t \geq 0}$ enostavni proces štetja, za katerega je $N_0 = 0$. Potem so za ta proces ekvivalentne naslednje trditve.

1. Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke in za vsak $t \geq 0$ je

$$N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t).$$

2. Proces $(N_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke in, ko $t \downarrow 0$, velja¹

$$\begin{aligned} P(N_t = 1) &= \lambda t + o(t), \\ P(N_t \geq 2) &= o(t). \end{aligned}$$

3. Za zaporedne čase skokov S_n velja, da je $S_n < \infty$ s.g. za vsak $n \geq 1$. Če označimo $S_0 = 0$, je zaporedje medprihodnih časov

$$T_i = S_i - S_{i-1}, \quad i \geq 1,$$

dobro definirano in je porazdeljeno kot zaporedje neodvisnih in enako $\text{Exp}(\lambda)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

4. Za vsak $t > 0$ je $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$ in, pogojno na $\{N_t = k\}$, $k \geq 1$, za vektor časov prvih k skokov velja

$$(S_1, S_2, \dots, S_k) | \{N_t = k\} \stackrel{(d)}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(k)}),$$

kjer je vektor $(U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(k)})$ vektor vrstilnih statistik vektorja $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ neodvisnih enako $EZ[0, t]$ -porazdeljenih komponent. Pogojna gostota vektorja $(S_1, S_2, \dots, S_k)$ pri pogoju $\{N_t = k\}$, $k \geq 1$, je

$$p(s_1, s_2, \dots, s_k) = \frac{k!}{t^k} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < t\}}.$$

Opombe:

Če velja 1), so s tem implicitno podane vse končnorazsežne robne porazdelitve procesa. Res, za $n \geq 1$ in $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ je

$$(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_n}) = (N_{t_1}, N_{t_1} + (N_{t_2} - N_{t_1}), \dots, N_{t_{n-1}} + (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})),$$

kjer ima $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ neodvisne komponente po predpostavki o neodvisnosti prirastkov in je zaradi stacionarnosti $N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \stackrel{(d)}{=} N_{t_i - t_{i-1}} \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$.

¹Tu je $o(t)$ Landauova oznaka za razred funkcij $g(t)$ z lastnostjo $\lim_{t \downarrow 0} \frac{g(t)}{t} = 0$.

Pomen točke 3) je, da nam zagotavlja obstoj homogenega Poissonovega procesa in daje algoritem za njegovo simulacijo. Res, naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tak verjetnostni prostor, da na njem obstaja neko zaporedje $(E_i)_{i \geq 1}$ neodvisnih enako $Exp(\lambda)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $(0, \infty)$. Ker je po KZVŠ Kolmogorova $\mathbb{P}(\sum_{i \geq 1} E_i = \infty) = 1$, je na tem dogodku s predpisom $N_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n E_i$, $\Delta(S_n) = 1$, $n \geq 1$ in $N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}$ podan proces štetja $(N_t)_{t \geq 0}$, ki zadošča pogoju 3).

Tudi lastnost 4) nam omogoča simulacijo trajektorij do nekega fiksnega časa $t > 0$. Najprej iz $Pois(\lambda t)$ simuliramo, koliko skokov naj bi pri tej trajektoriji bilo. Recimo, da je izsid k . Potem moramo k -krat simulirati neodvisno enakomerno zvezno na intervalu $[0, t]$, razvrstiti rezultate po velikosti in dobimo čase prihodov od 0 do t , kar nam da trajektorije.

Dokaz. 1) $\implies$ 2)

Po predpostavki ima $(N_t)_{t \geq 0}$ neodvisne in stacionarne prirastke in za vsak $t \geq 0$ je $N_t \stackrel{(d)}{=} Pois(\lambda t)$. Potemtakem velja

$$P(N_t = 1) = \lambda t e^{-\lambda t} = \lambda t + \underbrace{\lambda t(e^{-\lambda t} - 1)}_{\in o(t)},$$

saj je

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\lambda t(e^{-\lambda t} - 1)}{t} = 0.$$

Prav tako je

$$P(N_t \geq 2) = 1 - P(N_t = 0) - P(N_t = 1) = \underbrace{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}_{\in o(t)},$$

saj je z uporabo L'Hospitalovega pravila

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\lambda e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t}}{1} = 0.$$

2) $\implies$ 1)

Vemo, da so prirastki neodvisni ter stacionarni. Ker je $N_0 = 0$ po predpostavki, je $N_0 \stackrel{(d)}{=} Pois(0)$. Naj bo torej $t > 0$. Za $n \geq 1$ razdelimo interval $(0, t]$ na n enako dolgih podintervalov $\left(\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}\right]$, $k = 1, 2, \dots, n$. Sprašujemo se, na koliko od le-teh smo opazili vsaj en prihod. V ta namen definiramo

$$M_n := \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\left\{N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 1\right\}} \quad (1)$$

Slučajna spremenljivka M_n nam pove število podintervalov na katerih smo opazili vsaj en prihod. Njene očitne lastnosti sta $M_n \leq N_t$ in $M_n \leq n$.

Zaradi neodvisnosti prirastkov so $N_{\frac{t}{n}} - N_0, N_{\frac{2t}{n}} - N_{\frac{t}{n}}, \dots, N_{\frac{nt}{n}} - N_{\frac{(n-1)t}{n}}$ neodvisne slučajne spremenljivke, torej so tudi

$$Z_k := \mathbb{1}_{\left\{N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 1\right\}}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

neodvisne Bernoullijeve slučajne spremenljivke. Zaradi stacionarnosti prirastkov je

$$Z_k \stackrel{(d)}{=} \text{Ber}(\mathbb{P}(N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 1)) = \text{Ber}(\mathbb{P}(N_{\frac{t}{n}} \geq 1)),$$

torej so Z_k , $1 \leq k \leq n$, tudi enako porazdeljene in sicer $\text{Ber}(p_n)$ kjer smo označili

$$p_n = \mathbb{P}(N_{\frac{t}{n}} \geq 1).$$

Tako vidimo, da velja

$$M_n \stackrel{(d)}{=} \text{Bin}(n, p_n),$$

saj je $M_n = \sum_{k=1}^n Z_k$ vsota neodvisnih enako $\text{Ber}(p_n)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

Z vpeljavo nove spremenljivke $h = \frac{t}{n}$ vidimo, da velja še

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} np_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(N_{\frac{t}{n}} \geq 1) = \lim_{h \downarrow 0} t \frac{P(N_h \geq 1)}{h} = \\ &= t \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(N_h = 1) + P(N_h \geq 2)}{h} = t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda h + o(h) + o(h)}{h} = \lambda t. \end{aligned}$$

Iz zakona redkih dogodkov sledi, da zaporedje M_n konvergira v porazdelitvi proti $\text{Pois}(\lambda t)$ -porazdeljeni slučajni spremenljivki.

Želimo dokazati, da velja $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$. V ta namen ocenimo napako, ki jo naredimo, če N_t aproksimiramo z M_n .

Definirajmo napako $R_n = N_t - M_n$. Očitno je $N_t = M_n + R_n$. Do napake je prišlo natanko tedaj, ko sta vsaj na kakšnem od podintervalov bila dva ali več prihodov. Potem je

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_n > 0) &= \mathbb{P}(R_n \geq 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n \left\{N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 2\right\}\right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_{\frac{kt}{n}} - N_{\frac{(k-1)t}{n}} \geq 2) = n\mathbb{P}(N_{\frac{t}{n}} \geq 2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

torej napaka R_n v verjetnosti konvergira proti 0, t.j., $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Sedaj se lahko sklicemo na Slutskyjevo lemo,² po kateri (konstantno) zaporedje N_t konvergira v porazdelitvi proti $\text{Pois}(\lambda t)$, to pa je možno le, če je $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$.

²Lema Slutskyja med drugim pove, da za zaporedji $(X_n)_{n \geq 1}$ in $(Y_n)_{n \geq 1}$ slučajnih spremenljivk na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, za kateri velja $X_n \xrightarrow{(d)} X$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c \in \mathbb{R}$, velja $X_n + Y_n \xrightarrow{(d)} X + c$.

Lahko pa dokažemo $N_t \stackrel{(d)}{=} Pois(\lambda t)$ neposredno brez sklicevanja na lemo Slutskyja. V ta namen naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty \leq K$, poljubna omejena zvezna funkcija. Potem je

$$\mathbb{E}(f(N_t)) = \mathbb{E}(f(M_n + R_n)) = \mathbb{E}(f(M_n)) + \mathbb{E}(f(M_n + R_n) - f(M_n)). \quad (2)$$

Ker zaporedje $(M_n)_{n \geq 1}$ konvergira v porazdelitvi k $Pois(\lambda t)$ -porazdeljeni slučajni spremenljivki, po definiciji konvergence v porazdelitvi velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(M_n)) = \mathbb{E}(f(Pois(\lambda t))). \quad (3)$$

Za drugi sumand v (2) pa lahko uporabimo oceno

$$|f(M_n + R_n) - f(M_n)| \leq 2K \mathbb{1}_{\{R_n > 0\}},$$

iz katere sledi

$$|\mathbb{E}(f(M_n + R_n) - f(M_n))| \leq 2K \mathbb{P}(R_n > 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4)$$

Ko (3) in (4) uporabimo v (2), sledi

$$\mathbb{E}(f(N_t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(M_n)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(M_n + R_n) - f(M_n)) = \mathbb{E}(f(Pois(\lambda t))),$$

to pa po definiciji pomeni $N_t \stackrel{(d)}{=} Pois(\lambda t)$.

1) $\implies$ 3)

Naj bodo $(S_n)_{n \geq 1}$ zaporedni časi skokov procesa $(N_t)_{t \geq 0}$. Najprej preverimo, da je $\mathbb{P}(S_n < \infty) = 1$ za vse $n \geq 1$. To velja, ker je

$$\mathbb{P}(S_n > t) = \mathbb{P}(N_t < n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Če definiramo še $S_0 := 0$, je torej zaporedje medprihodnih časov $T_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$, dobro definirano. Dokazati je potrebno, da je to zaporedje neodvisnih in enako $Exp(\lambda)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

Naj bo $(E_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih enako $Exp(\lambda)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk in definirajmo

$$W_n = \sum_{i=1}^n E_i, \quad n \geq 1.$$

Za posamične spremenljivke W_n vemo, da so porazdeljene $\Gamma(n, \lambda)$.

Trdimo, da je $(S_n)_{n \geq 1} \stackrel{(d)}{=} (W_n)_{n \geq 1}$. To je ekvivalentno (po definiciji)

$$(S_1, S_2, \dots, S_n) \stackrel{(d)}{=} (W_1, W_2, \dots, W_n), \quad \forall n \geq 1.$$

Dokazujemo z indukcijo, najprej baza pri $n = 1$. Tedaj je

$$\mathbb{P}(S_1 > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t},$$

saj je po predpostavki $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$. Po drugi strani pa je

$$P(W_1 > t) = \mathbb{P}(E_1 > t) = e^{-\lambda t},$$

saj je $E_1 \stackrel{(d)}{=} \text{Exp}(\lambda)$. Trditev pri $n = 1$ torej velja.

Dokažimo sedaj še indukcijski korak in predpostavimo, da trditev velja za nek $n \geq 1$. Da dokažemo $(S_1, \dots, S_n, S_{n+1}) \stackrel{(d)}{=} (W_1, \dots, W_n, W_{n+1})$, je dovolj videti, da se ujemata skupni preživetveni funkciji, torej

$$P(S_1 > s_1, \dots, S_n > s_n, S_{n+1} > s_{n+1}) = \mathbb{P}(W_1 > s_1, \dots, W_n > s_n, W_{n+1} > s_{n+1}),$$

za poljubne $(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ker pa sta zaporedji $(S_n)_{n \geq 1}$ in $(W_n)_{n \geq 1}$ naraščajoči in nenegativni, se lahko brez škode omejimo na primer, ko je $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1}$.

Najprej izračunamo levi del

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_1 > s_1, \dots, S_n > s_n, S_{n+1} > s_{n+1}) &= \\ &= \mathbb{P}(S_1 > s_1, \dots, S_{n-1} > s_{n-1}, S_n > s_{n+1}) + \\ &\quad + \mathbb{P}(s_1 < S_1 \leq s_{n+1}, s_2 < S_2 \leq s_{n+1}, \dots, s_n < S_n \leq s_{n+1}, S_{n+1} > s_{n+1}). \end{aligned}$$

Pri prvem sumandu lahko uporabimo indukcijsko predpostavko neposredno. Da bi jo lahko uporabili še pri drugem, pa pogojimo na $(S_1, \dots, S_n)$ in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s_1 < S_1 \leq s_{n+1}, s_2 < S_2 \leq s_{n+1}, \dots, s_n < S_n \leq s_{n+1}, S_{n+1} > s_{n+1}) &= \\ \mathbb{E}(\mathbb{P}(s_1 < S_1 \leq s_{n+1}, \dots, s_n < S_n \leq s_{n+1}, S_{n+1} > s_{n+1} | S_1, \dots, S_n)) &= \\ = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{s_1 < S_1 \leq s_{n+1}\}} \dots \mathbb{1}_{\{s_n < S_n \leq s_{n+1}\}} \mathbb{1}_{\{S_{n+1} > s_{n+1}\}} | S_1, \dots, S_n)) &= \\ = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{s_1 < S_1 \leq s_{n+1}\}} \dots \mathbb{1}_{\{s_n < S_n \leq s_{n+1}\}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_{n+1} > s_{n+1}\}} | S_1, \dots, S_n)) &= (*) \end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo, kako se izraža pogojno matematično upanje $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_{n+1} > s_{n+1}\}} | S_1, \dots, S_n)$ na dogodku $\{S_n \leq s_{n+1}\}$ kot funkcija slučajnega vektorja $(S_1, \dots, S_n)$. Za $0 < u_1 < \dots < u_n \leq s_{n+1}$ je zaradi neodvisnosti prirastkov

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{S_{n+1} > s_{n+1}\}} | S_1 = u_1, \dots, S_n = u_n) = \mathbb{P}(N_{s_{n+1}} - N_{u_n} = 0) = e^{-\lambda(s_{n+1} - u_n)},$$

kjer smo upoštevali, da če je $S_n = u_n \leq s_{n+1}$ zahteva $S_{n+1} > s_{n+1}$ pomeni, da med u_n in s_{n+1} ni bilo nobenega prihoda. Torej je $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{S_{n+1} > s_{n+1}\}} | S_1, \dots, S_n] = e^{-\lambda(s_{n+1} - S_n)}$ na dogodku $\{S_n \leq s_{n+1}\}$.

Z ozirom na to, da je v zgornjem razmisleku v ozadju pogojevanje na dogodek z verjetnostjo 0, bi bil bolj formalni razmislek sledeč

$$\mathbb{P}(S_{n+1} > s_{n+1} | S_1 = u_1, \dots, S_n = u_n) =$$

$$= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{P}(N_{u_1-h} = 0, N_{u_1} - N_{u_1-h} = 1, N_{u_2-h} - N_{u_1} = 0, \dots, N_{u_n} - N_{u_n-h} = 1, N_{s_{n+1}} - N_{u_n} = 0)}{\mathbb{P}(N_{u_1-h} = 0, N_{u_1} - N_{u_1-h} = 1, N_{u_2-h} - N_{u_1} = 0, \dots, N_{u_n} - N_{u_n-h} = 1)} =$$

$$\mathbb{P}(N_{s_{n+1}} - N_{u_n} = 0) = e^{-\lambda(s_{n+1}-u_n)},$$

kjer smo končni rezultat dobili z upoštevanjem neodvisnosti prirastkov.

Ko upoštevamo pravkar izračunano, sledi

$$(*) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{s_1 < S_1 \leq s_{n+1}\}} \dots \mathbb{1}_{\{s_n < S_n \leq s_{n+1}\}} e^{-\lambda(s_{n+1}-S_n)} \right) =$$

$$= \int \dots \int_{(s_1, s_{n+1}] \times \dots \times (s_n, s_{n+1}]} e^{-\lambda(s_{n+1}-u_n)} dF_{(S_1, \dots, S_n)}(u_1, \dots, u_n),$$

kjer je $F_{(S_1, \dots, S_n)}(u_1, \dots, u_n)$ skupni zakon vektorja $(S_1, \dots, S_n)$.

Isti račun ponovimo za $(W_1, \dots, W_n, W_{n+1})$ in dobimo

$$\mathbb{P}(W_1 > s_1, \dots, W_n > s_n, W_{n+1} > s_{n+1}) =$$

$$= \mathbb{P}(W_1 > s_1, \dots, W_{n-1} > s_{n-1}, W_n > s_{n+1}) +$$

$$+ \mathbb{P}(s_1 < W_1 \leq s_{n+1}, \dots, s_n < W_n \leq s_{n+1}, W_{n+1} > s_{n+1}).$$

S pogojevanjem na $(W_1, \dots, W_n)$ in enakim premislekom kot zgoraj se drugi sumand zapiše kot

$$\mathbb{P}(s_1 < W_1 \leq s_{n+1}, \dots, s_n < W_n \leq s_{n+1}, W_{n+1} > s_{n+1}) =$$

$$= \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{s_1 < W_1 \leq s_{n+1}\}} \dots \mathbb{1}_{\{s_n < W_n \leq s_{n+1}\}} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{W_{n+1} > s_{n+1}\}} | W_1, \dots, W_n \right) \right) = (**)$$

Izračunajmo še pogojno verjetnost $\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{W_{n+1} > s_{n+1}\}} | W_1, \dots, W_n \right)$. Za $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n \leq s_{n+1}$ kot zgoraj velja, z upoštevanjem $W_{n+1} = W_n + E_{n+1}$,

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > s_{n+1} | W_1 = u_1, \dots, W_n = u_n) =$$

$$= \mathbb{P}(E_{n+1} > s_{n+1} - u_n | W_1 = u_1, \dots, W_n = u_n) =$$

$$= \mathbb{P}(E_{n+1} > s_{n+1} - u_n) = e^{-\lambda(s_{n+1}-u_n)},$$

kjer smo upoštevali, da je E_{n+1} neodvisna od $(W_1, \dots, W_n)$. Torej je na dogodku $\{W_n \leq s_{n+1}\}$

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{W_{n+1} > s_{n+1}\}} | W_1, \dots, W_n \right) = e^{-\lambda(s_{n+1}-W_n)}.$$

Ko to upoštevamo v $(**)$, dobimo

$$(**) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{s_1 < W_1 \leq s_{n+1}\}} \dots \mathbb{1}_{\{s_n < W_n \leq s_{n+1}\}} e^{-\lambda(s_{n+1}-W_n)} \right) =$$

$$= \int \dots \int_{(s_1, s_{n+1}] \times \dots \times (s_n, s_{n+1}]} e^{-\lambda(s_{n+1}-u_n)} dF_{(W_1, \dots, W_n)}(u_1, \dots, u_n),$$

kjer je $F_{(W_1, \dots, W_n)}(u_1, \dots, u_n)$ skupni zakon vektorja $(W_1, \dots, W_n)$.

Po indukcijski predpostavki je $(W_1, \dots, W_n) \stackrel{(d)}{=} (S_1, \dots, S_n)$, torej je

$$F_{(S_1, \dots, S_n)}(u_1, \dots, u_n) = F_{(W_1, \dots, W_n)}(u_1, \dots, u_n).$$

Potem je

$$\mathbb{P}(S_1 > s_1, \dots, S_{n-1} > s_{n-1}, S_n > s_{n+1}) = \mathbb{P}(W_1 > s_1, \dots, W_{n-1} > s_{n-1}, W_n > s_{n+1})$$

in

$$\begin{aligned} (*) &= \int \dots \int_{(s_1, s_{n+1}] \times \dots \times (s_n, s_{n+1}]} e^{-\lambda(s_{n+1}-u_n)} dF_{(S_1, \dots, S_n)}(u_1, \dots, u_n) = \\ &= \int \dots \int_{(s_1, s_{n+1}] \times \dots \times (s_n, s_{n+1}]} e^{-\lambda(s_{n+1}-u_n)} dF_{(W_1, \dots, W_n)}(u_1, \dots, u_n) = (**), \end{aligned}$$

saj integriramo isto funkcijo po istem območju glede na isti zakon (mero), kar točno dokazuje

$$P(S_1 > s_1, \dots, S_n > s_n, S_{n+1} > s_{n+1}) = \mathbb{P}(W_1 > s_1, \dots, W_n > s_n, W_{n+1} > s_{n+1}),$$

kot želeno.

Ker torej velja $(S_1, \dots, S_n) \stackrel{(d)}{=} (W_1, \dots, W_n)$ za vse $n \geq 1$. Ker je funkcija $\phi_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definirana kot

$$\phi_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$$

linearna, torej zvezna in, posledično, Borelovo merljiva, velja za vse $n \geq 1$

$$(T_1, \dots, T_n) = \phi_n(S_1, \dots, S_n) \stackrel{(d)}{=} \phi_n(W_1, \dots, W_n) = (E_1, \dots, E_n),$$

iz česar sledi $(T_i)_{i \geq 1} \stackrel{(d)}{=} (E_i)_{i \geq 1}$, torej je zaporedje medprihodnih časov $(T_i)_{i \geq 1}$ zaporedje neodvisnih enako $Exp(\lambda)$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

3) $\implies$ 4)

Po predpostavki je $(N_t)_{t \geq 0}$ enostavni proces štetja, pri katerem je $N_0 = 0$ in so medprihodni časi $T_i = S_i - S_{i-1}$, $i \geq 1$, ($S_0 = 0$) neodvisni in enako $Exp(\lambda)$ -porazdeljeni. Posledično je $S_n \stackrel{(d)}{=} gamma(n, \lambda)$ z gostoto

$$\frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\{s > 0\}}, \quad n \geq 1.$$

Dokažimo najprej, da je za vsak $t > 0$ slučajna spremenljivka N_t porazdeljena Poissonovo s parametrom λt . Res, za fiksen $t > 0$ je z integracijo “per

partes”

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(S_k \leq t < S_{k+1}) = \mathbb{P}(S_k \leq t) - \mathbb{P}(S_{k+1} \leq t) \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} ds - \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} ds \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} ds + e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} ds \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathbb{P}(Pois(\lambda t) = k),
\end{aligned}$$

kjer smo upoštevali $\{S_{k+1} \leq t\} \subset \{S_k \leq t\}$.

Tako vidimo, da je N_t zares porazdeljen Poissonovo s parametrom λt . V posebnem to pomeni, da ima za $t > 0$ in $k \geq 1$ dogodek $\{N_t = k\}$ strogo pozitivno verjetnost.

Sedaj dokažimo še lastnost vrstilnih statistik, najprej bolj neformalno.

Ker imajo $(S_1, \dots, S_k)$ skupno gostoto za vse $k \geq 1$, lahko za $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < t$ izračunamo pogojno gostoto.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_1 \in ds_1, S_2 \in ds_2, \dots, S_k \in ds_k | N_t = k) \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_1 \in ds_1, T_2 \in d(s_2 - s_1), \dots, T_k \in d(s_k - s_{k-1}), T_{k+1} > t - s_k)}{\mathbb{P}(N_t = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_1 \in ds_1) \mathbb{P}(T_2 \in d(s_2 - s_1)) \dots \mathbb{P}(T_k \in d(s_k - s_{k-1})) \mathbb{P}(T_{k+1} > t - s_k)}{\mathbb{P}(N_t = k)} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(s_k - s_{k-1})} e^{-\lambda(t - s_k)} ds_1 \dots ds_k}{\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}} \\
&= \frac{k!}{t^k} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < t\}} ds_1 \dots ds_k,
\end{aligned}$$

kar je točno gostota za vektor vrstilnih statistik $(U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$, kjer je $(U_1, \dots, U_k)$ vektor neodvisnih $EZ[0, t]$ -porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

Korekten dokaz pa je sledeč. Ker je, pri oznakah iz dokaza prejšnje točke, $(T_1, \dots, T_n) = \phi_n(S_1, \dots, S_n)$ in je $|\det \phi_n| = 1$, sledi iz predpostavke, da ima vektor $(T_1, \dots, T_n)$ gostoto $\lambda^n e^{-\lambda t_1} \dots e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{\{t_1 > 0, \dots, t_n > 0\}}$, da ima vektor $(S_1, \dots, S_n)$ gostoto

$$\lambda^n e^{-\lambda s_n} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < \dots < s_n\}}, \quad n \geq 1.$$

Potem ima vektor $(S_1, \dots, S_k, S_{k+1})$ pogojno na dogodek $\{N_t = k\} = \{S_k \leq t < S_{k+1}\}$, $k \geq 1$, gostoto

$$\begin{aligned}
f(s_1, \dots, s_k, s_{k+1} | N_t = k) &= \frac{\lambda^{k+1} e^{-\lambda s_{k+1}}}{\mathbb{P}(N_t = k)} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1}\}} \mathbb{1}_{\{s_k \leq t < s_{k+1}\}} \\
&= \frac{k!}{t^k} \lambda e^{-\lambda s_{k+1}} e^{\lambda t} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < \dots < s_k \leq t\}} \mathbb{1}_{\{t < s_{k+1}\}}.
\end{aligned}$$

Iz tega takoj sledi, da je pogojna gostota vektorja $(S_1, \dots, S_k)$ pri pogoju $\{N_t = k\}$ enaka

$$\begin{aligned} f(s_1, \dots, s_k | N_t = k) &= \int_{\mathbb{R}} f(s_1, \dots, s_k, s_{k+1} | N_t = k) ds_{k+1} = \\ &= \frac{k!}{t^k} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < \dots < s_k \leq t\}} \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda(s_{k+1}-t)} ds_{k+1} = \\ &= \frac{k!}{t^k} \mathbb{1}_{\{0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k < t\}}, \end{aligned}$$

kar dokazuje trditve.

Da dokažemo, da iz 4) sledi 1), potrebujemo naslednjo lemo.

Lema 2. Naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ dana števila, $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$. Potem sta za nabor $Z_1, \dots, Z_n$ slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$ ekvivalentni naslednji trditvi-

- a) $Z_1, \dots, Z_n$ so neodvisne in $Z_i \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, n$.
- b) $Z := Z_1 + \dots + Z_n$ je porazdeljena $Z \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda)$ in, pogojno na $\{Z = k\}$, $k \geq 1$, je slučajni vektor $(Z_1, \dots, Z_n)$ porazdeljen $\text{Mult}(k; p_1, \dots, p_n)$, torej velja

$$P(Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n | Z = k) = \frac{k!}{j_1! j_2! \dots j_n!} p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n},$$

kjer je $j_1 + \dots + j_n = k$.

Dokaz Leme. a) $\Rightarrow$ b)]

Ker so $Z_1, \dots, Z_n$ neodvisne in $Z_i \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda_i)$, sledi da je $Z = Z_1 + \dots + Z_n \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda)$. Torej za $j_1, \dots, j_n \geq 0$, $j_1 + \dots + j_n = k \geq 1$, velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n | Z = k) &= \frac{\mathbb{P}(Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n)}{\mathbb{P}(Z = k)} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{j_1}}{j_1!} \dots e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^{j_n}}{j_n!}}{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}} = \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{\lambda_n}{\lambda} \right)^{j_n} = \\ &= \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} (p_1)^{j_1} \dots (p_n)^{j_n}, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je vektor $(Z_1, \dots, Z_n)$, pogojno na $\{Z = k\}$, $k \geq 1$, porazdeljen $\text{Mult}(k; p_1, \dots, p_n)$.

b) $\Rightarrow$ a)

Po predpostavki je $Z \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda)$, vektor $(Z_1, \dots, Z_n)$ pa je, pogojno na $\{Z = k\}$, $k \geq 1$, porazdeljen $\text{Mult}(k; p_1, \dots, p_n)$. Potem za $j_1 + \dots + j_n = k \geq 1$ velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n) &= \mathbb{P}(Z_1 = j_1, \dots, Z_n = j_n | Z = k) \mathbb{P}(Z = k) = \\ &= \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} (p_1)^{j_1} \dots (p_n)^{j_n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} (p_1 \lambda)^{j_1} \dots (p_n \lambda)^{j_n}}{j_1! \dots j_n!} = \\ &= e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{j_1}}{j_1!} \dots e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^{j_n}}{j_n!} = \mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda_1) = j_1) \dots \mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda_n) = j_n). \end{aligned}$$

Če je pa $k = 0$, sledi $j_1 = j_2 = \dots = j_n = 0$ in velja

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 = 0, \dots, Z_n = 0) &= \mathbb{P}(Z = 0) = e^{-\lambda} = e^{-\lambda_1} \dots e^{-\lambda_n} = \\ &= \mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda_1) = 0) \dots \mathbb{P}(\text{Pois}(\lambda_n) = 0). \end{aligned}$$

Tako vidimo, da ima vektor $(Z_1, \dots, Z_n)$ neodvisne komponente in $Z_i \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq n$. $\square$

Sedaj lahko dokažemo, da iz 4) sledi 1).

4) $\implies$ 1)

Treba je dokazati, da ima proces $(N_t)_{t \geq 0}$ neodvisne in stacionarne prirastke.

Naj bodo torej $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$. Po predpostavki je $N_t \stackrel{(d)}{=} \text{Pois}(\lambda t)$. Ker je $N_t = N_{t_1} + (N_{t_2} - N_{t_1}) + \dots + (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ je, z ozirom na zgornjo lemo, dovolj pokazati, da je pogojna porazdelitev vektorja $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ pogojno na $\{N_t = k\}$, $k \geq 1$ multinomska. Res, za $j_1, \dots, j_n \geq 0$, $j_1 + \dots + j_n = k \geq 1$, velja

$$\begin{aligned} (*) &= \mathbb{P}(N_{t_1} = j_1, N_{t_2} - N_{t_1} = j_2, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = j_n | N_t = k) = \\ &= \mathbb{P}(S_{j_1} \leq t_1 < S_{j_1+1}, S_{j_1+j_2} \leq t_2 < S_{j_1+j_2+1}, \dots, S_{k-j_n} \leq t_{n-1} < S_{k-j_n+1} | N_t = k). \end{aligned}$$

Ker po predpostavki velja, da je $(S_1, \dots, S_k) | \{N_t = k\} \stackrel{(d)}{=} (U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$, za $U_1, \dots, U_k$ neodvisne in enako $EZ[0, t]$ -porazdeljene, lahko nadaljujemo

$$(*) = \mathbb{P}(U_{(j_1)} \leq t_1 < U_{(j_1+1)}, \dots, U_{(k-j_n)} \leq t_{n-1} < U_{(k-j_n+1)}) = (**).$$

Sedaj izrazimo iskano verjetnost s slučajnimi spremenljivkami $U_1, \dots, U_n$ in dobimo

$$\begin{aligned} (**) &= \mathbb{P} \left(\sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{U_i \in (0, t_1]\}} = j_1, \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{U_i \in (t_1, t_2]\}} = j_2, \dots, \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{U_i \in (t_{n-1}, t_n]\}} = j_n \right) = \\ &= \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} \left(\frac{t_1}{t} \right)^{j_1} \left(\frac{t_2 - t_1}{t} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t} \right)^{j_n}, \end{aligned}$$

kar pomeni, da je vektor prirastkov $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ pogojno na $\{N_t = k\}$, $k \geq 1$, porazdeljen multinomsko $Mult(k; p_1, \dots, p_n)$, kjer je $p_i = \frac{t_i - t_{i-1}}{t}$, $1 \leq i \leq n$.

Iz leme sedaj sledi, da so $N_{t_1}, (N_{t_2} - N_{t_1}), \dots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ neodvisne slučajne spremenljivke in velja

$$N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \stackrel{(d)}{=} Pois\left(\frac{(t_i - t_{i-1})}{t} \lambda t\right) = Pois(\lambda(t_i - t_{i-1})),$$

kar dokazuje, da ima proces $(N_t)_{t \geq 0}$ neodvisne in stacionarne prirastke kot želeno. $\square$