LINEARNA ALGEBRA, 2020/21
20. VAJE: 17. 3. 2021

3. Matrika
$$\begin{bmatrix} 1 & a & -a-3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
ima karakteristični polinom $\chi(t) = (2-t)(1-t)^2$ (neodvisno od a). Matrika bo diagonalizabilna natanko tedaj, ko je $\dim\ker(A-1I) = 2$ oziroma $\operatorname{rang}(A-1I) = 1$.
$$\begin{bmatrix} 0 & a & -a-3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & a & -a-3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & a & -a-3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$
$$\begin{bmatrix} 0 & a & a-3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Torej mora biti $a = 3$.

5. Naj bodo $\{\lambda_i \mid i = 1, \dots, n\}$ različne lastne vrednosti in $\{x_i \mid i = 1, \dots, n\}$ pripadajoči lastni vektorji. Potem je $\ker(A - \lambda_i I) = \operatorname{lin}\{x_i\}$. Iz enačbe
$$A(Bx_i) = BAx_i = \lambda_i(Bx_i)$$
dobimo, da je $Bx_i \in \ker(A - \lambda_i I) = \operatorname{lin}\{x_i\}$ torej je $Bx_i = \mu_i x_i$ (x_i je lastni vektor B). (V nadaljevanju je predstavljen rahlo drugačen argument.)

   Matrika B ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, torej je podobna diagonalni matriki.

6. Naj bo λ lastna vrednost A in $x \in \ker(A - \lambda I)$. Potem je $A(Bx) = BAx = \lambda Bx$ torej je $Bx \in \ker(A-\lambda I)$. Torej je $\ker(A-\lambda I)$ invarianten za B. Zato ima B lastni vektor v $\ker(A - \lambda I)$. Ta vektor je lastni vektor obeh matrik.