

Lastne vrednosti - 4. del

6. Jordanska kanonična forma

Definicija jordske kletke in jordske matrike

Jordanska kletka je matrika oblike

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \dots$$

kjer je λ kompleksno število. **Jordanska matrika** je matrika oblike

$$\begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_m \end{bmatrix},$$

kjer so $J_1, \dots, J_m$ jordske kletke (lahko različnih velikosti in različnih λ).

Spomnimo se, da ni vsaka matrika podobna diagonalni matriki. Velja pa:

Izrek o jordanški kanonični formi

Vsaka kompleksna kvadratna matrika A je podobna neki jordanški matriki J . Pravimo, da je J **jordanska kanonična forma** za A .

Opomba: Jordanska kanonična forma matrike A ni enolična. Če namreč permutiramo njene jordanške kletke, potem spet dobimo jordanško kanonično formo matrike A . S primerno permutacijo jordanških kletk lahko dosežemo, da jordanške kletke z istim λ sedijo skupaj in so urejene po velikosti od največje do najmanjše.

Opomba: Jordanska kanonična forma matrike A je uporabna za računanje funkcij matrike A . To bomo spoznali v naslednjem razdelku.

V dokazu izreka bomo potrebovali pojem jordske verige.

Definicija jordske verige

Naj bo λ lastna vrednost matrike A . **Jordanska veriga** dolžine k je tako zaporedje neničelnih vektorjev $v_1, \dots, v_k$ iz $\mathbb{C}^n$, da velja $(A - \lambda I)v_1 = 0, (A - \lambda I)v_2 = v_1, \dots, (A - \lambda I)v_k = v_{k-1}$.

Opomba: Iz definicije sledi, da je $Av_1 = \lambda v_1, Av_2 = v_1 + \lambda v_2, \dots, Av_k = v_{k-1} + \lambda v_k$. V matrični obliki to zapišemo kot

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \quad (*)$$

Matrika $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{bmatrix}$ ni kvadratna. Stolpci so linearno neodvisni.

Definicija jordsanske baze

Bazi, ki je unija jordanskih verig pravimo **jordanska baza**.

Če uspemo najti jordansko bazo za $\mathbb{C}^n$, je dokaz izreka o jordanski kanonični formi končan. Elemente te baze namreč zložimo v matriko

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_m \end{bmatrix},$$

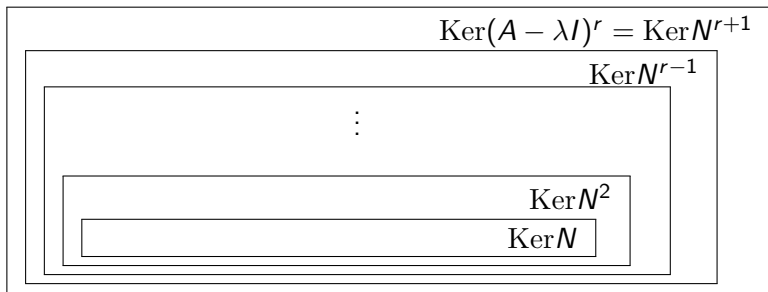
kjer so stolpci podmatrike P_i ravno elementi i -te Jordanske verige v tej bazi. Po formuli (*) obstajajo take Jordanske kletke $J_1, \dots, J_m$, da velja $AP_i = P_i J_i$ za vsak i . Odtod sledi, da velja

$$AP = P \begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_m \end{bmatrix},$$

Torej je matrika A res podobna Jordanski matriki.

Da bi našli jordansko bazo za $\mathbb{C}^n$, je dovolj dovolj poiskati jordansko bazo za vsak korenski podprostor posebej. Po izreku o korenskem razcepu je namreč $\mathbb{C}^n$ direktna vsota vseh korenskih podprostorov matrike A , torej je unija baz vseh korenskih podprostorov baza za cel prostor $\mathbb{C}^n$.

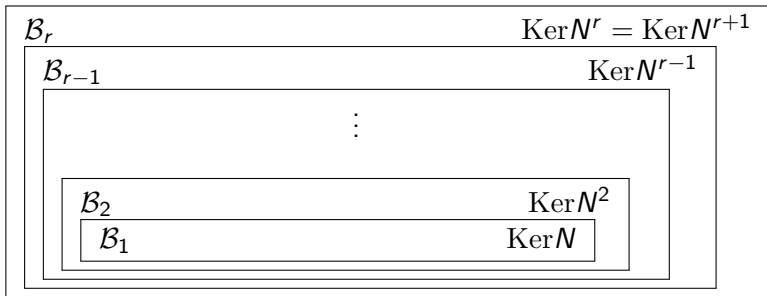
Korenski podprostor $\text{Ker}(A - \lambda I)^r$, ki ustreza lastni vrednosti λ si predstavljamo kot veliko škatlo, v kateri gnezdijo majhne škatle. Najmanjša od teh škatel je lastni podprostor $\text{Ker}(A - \lambda I)$ za λ .



Naj bo λ lastna vrednost matrike A . Označimo $N = A - \lambda I$. Opišimo konstrukcijo jordanske baze za korenski podprostor $\text{Ker} N^r$.

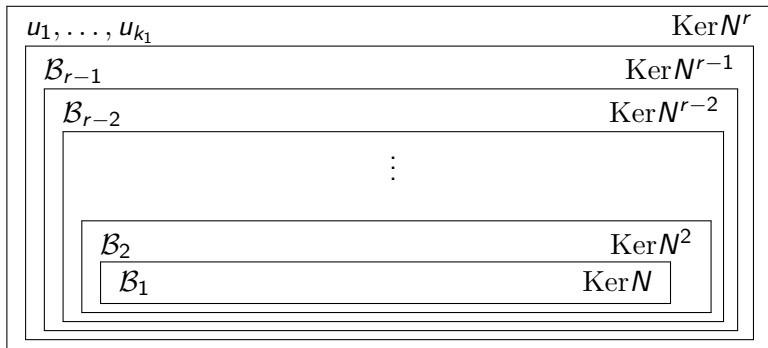
1. korak Računanje pomožnih baz.

Najprej za vsak $i = 1, \dots, r$ izberemo poljubno bazo $\mathcal{B}_i$ za $\text{Ker} N^i$.



2. korak Popravljanje pomožne baze $\mathcal{B}_r$.

Najprej izberimo take elemente $u_1, \dots, u_{k_1} \in \mathcal{B}_r$, ki dopolnijo $\mathcal{B}_{r-1}$ do baze za $\text{Ker } N^r$. Potem je $\mathcal{B}_{r-1} \cup \{u_1, \dots, u_{k_1}\}$ popravek pomožne baze $\mathcal{B}_r$.

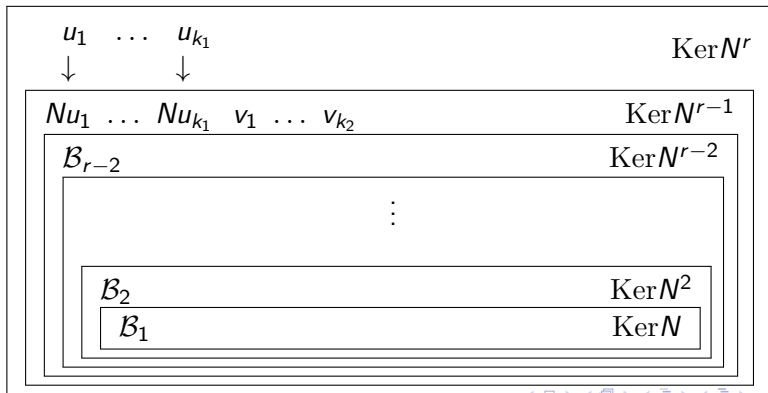


3. korak Popravljanje pomožne baze $\mathcal{B}_{r-1}$.

Najprej vektorje $u_1, \dots, u_{k_1} \in \text{Ker} N^r$ pomnožimo z matriko N .

- Dobljeni vektorji $Nu_1, \dots, Nu_{k_1}$ ležijo v $\text{Ker} N^{r-1}$.
- Množica $\mathcal{B}_{r-2} \cup \{Nu_1, \dots, Nu_{k_1}\}$ je linearno neodvisna.

Izberimo take elemente $v_1, \dots, v_{k_2} \in \mathcal{B}_{r-1}$, ki dopolnijo linearno neodvisno množico $\mathcal{B}_{r-2} \cup \{Nu_1, \dots, Nu_{k_1}\}$ do baze za $\text{Ker} N^{r-1}$. Potem je $\mathcal{B}_{r-2} \cup \{Nu_1, \dots, Nu_{k_1}\} \cup \{v_1, \dots, v_{k_2}\}$ popravek pomožne baze $\mathcal{B}_{r-1}$.

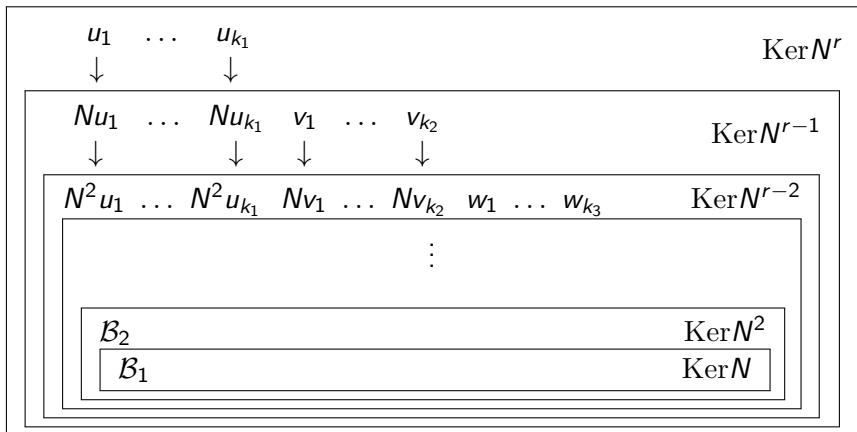


4. korak Popravljanje pomožne baze $\mathcal{B}_{r-2}$.

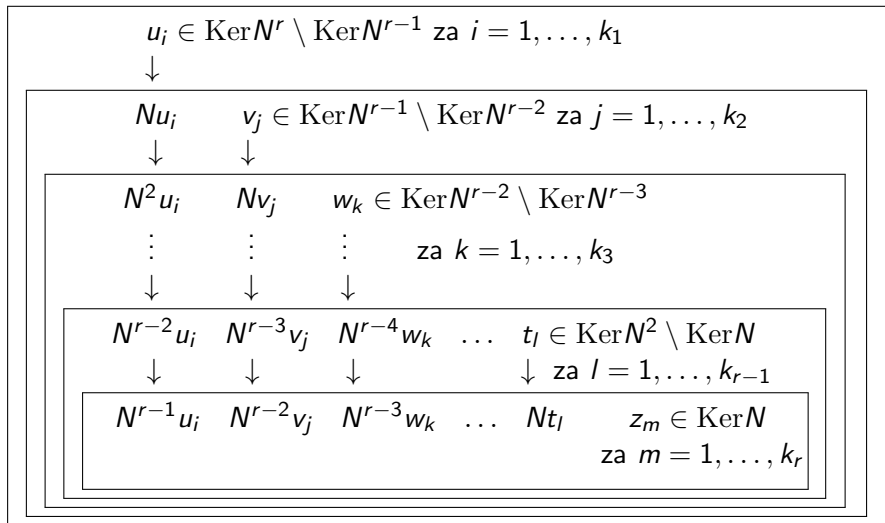
Najprej vektorje $Nu_1, \dots, Nu_{k_1}, v_1, \dots, v_{k_2} \in \text{Ker} N^{r-1}$ pomnožimo z N .

- Dobljeni vektorji $N^2u_1, \dots, N^2u_{k_1}, Nv_1, \dots, Nv_{k_2}$ ležijo v $\text{Ker} N^{r-2}$.
- Množica $\mathcal{B}_{r-3} \cup \{N^2u_1, \dots, N^2u_{k_1}, Nv_1, \dots, Nv_{k_2}\}$ je LN.

Izberimo take elemente $w_1, \dots, w_{k_3} \in \mathcal{B}_{r-2}$, ki dopolnijo LN množico $\mathcal{B}_{r-3} \cup \{N^2u_1, \dots, N^2u_{k_1}, Nv_1, \dots, Nv_{k_2}\}$ do baze za $\text{Ker} N^{r-2}$.



Postopek nadaljujemo, dokler ne popravimo vseh pomožnih baz. Na koncu dobimo naslednjo skico:



Vsak stolpec v zgornji skici nam da eno jordansko verigo. Imamo torej k_1 jordanskih verig dolžine r , k_2 jordanskih verig dolžine $r - 1$, k_3 jordanskih verig dolžine $r - 2$, $\dots$, k_r jordanskih verig dolžine 1. Skupaj je to $k_1 + \dots + k_r = \dim \operatorname{Ker} N$ jordanskih verig. Jordanskih verig za lastno vrednost λ je torej toliko kot je njena geometrijska večkratnost.

Treba je še utemeljiti, zakaj ta konstrukcija deluje. V vsakem od r korakov konstrukcije smo enkrat uporabili naslednjo trditev.

Trditev

Naj bo k naravno število in N matrika. Naj bo $\mathcal{B}_{k-1}$ baza za $\operatorname{Ker} N^{k-1}$, $\mathcal{B}_k$ baza za $\operatorname{Ker} N^k$ in naj bo $\mathcal{C}_{k+1}$ dopolnitev $\mathcal{B}_k$ do baze za $\operatorname{Ker} N^{k+1}$. Potem je množica $\mathcal{B}_{k-1} \cup N(\mathcal{C}_{k+1})$ linearno neodvisna, torej jo lahko dopolnimo do baze za $\operatorname{Ker} N^k$ s podmnožico od $\mathcal{B}_k$.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{B}_{k-1} = \{e_1, \dots, e_r\}$, $\mathcal{B}_k = \{f_1, \dots, f_s\}$ in $\mathcal{C}_{k+1} = \{g_1, \dots, g_t\}$. Ker je $\mathcal{C}_{k+1}$ podmnožica $\text{Ker} N^{k+1}$, je $N(\mathcal{C}_{k+1}) := \{Ng_1, \dots, Ng_t\}$ podmnožica $\text{Ker} N^k$. Preverimo, da je množica $\mathcal{B}_{k-1} \cup N(\mathcal{C}_{k+1})$ linearno neodvisna. Recimo, da je

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_1 Ng_1 + \dots + \beta_t Ng_t = 0 \quad (1)$$

Pomnožimo z N^{k-1} in upoštevajmo, da $e_1, \dots, e_r \in \text{Ker} N^{k-1}$.

Dobimo $\beta_1 N^k g_1 + \dots + \beta_t N^k g_t = 0$, torej $\beta_1 g_1 + \dots + \beta_t g_t \in \text{Ker} N^k$. Ker je $f_1, \dots, f_s$ baza za $\text{Ker} N^k$, lahko razvijemo

$$\beta_1 g_1 + \dots + \beta_t g_t = \gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_s f_s.$$

Ker je $f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t$ baza za $\text{Ker} N^{k+1}$, velja $\beta_1 = \dots = \beta_t = 0$ (in $\gamma_1 = \dots = \gamma_s = 0$), torej iz (1) dobimo $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = 0$.

Ker je $e_1, \dots, e_r$ baza za $\text{Ker} N^{k-1}$, odtod sledi $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$.

Torej je množica $\mathcal{B} := \{e_1, \dots, e_r, Ng_1, \dots, Ng_t\}$ res linearno neodvisna.

Če je $\text{Lin} \mathcal{B} = \text{Ker} N^k$, potem končamo. Če $\text{Lin} \mathcal{B} \neq \text{Ker} N^k$ potem $\text{Lin} \mathcal{B}$ ne more vsebovati vseh f_j , saj so ti baza za $\text{Ker} N^k$. Torej obstaja tak indeks i_1 , da $f_{i_1} \notin \text{Lin} \mathcal{B}$. Podobno konstruiramo tak i_2 , da $f_{i_2} \notin \text{Lin}(\mathcal{B} \cup \{f_{i_1}\})$. S postopkom nadaljujemo dokler $\mathcal{B} \cup \{f_{i_1}, \dots, f_{i_{s-t}}\}$ ni baza za $\text{Ker} N^k$.

Primer

Poišči jordanško kanonično formo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Rešitev: Najprej izračunamo karakteristični polinom

$$\det(A - xI) = x(x - 2)^3.$$

Potem izračunamo lastne in korenske podprostore za lastno vrednost 0

$$\text{Ker} A = \text{Lin} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Ker} A^2$$

in nato še za lastno vrednost 2

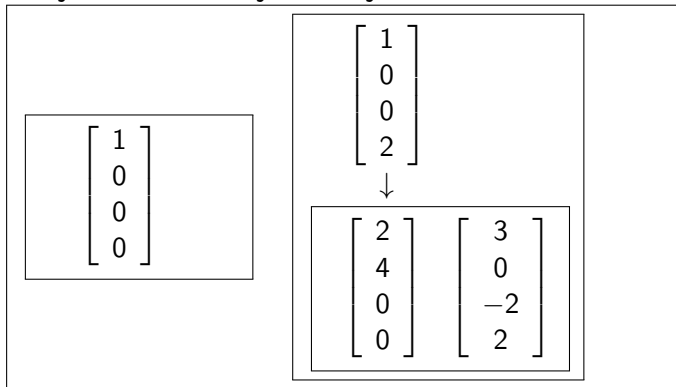
$$\text{Ker}(A - 2I) = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Ker}(A - 2I)^2 = \text{Lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Ker}(A - 2I)^3$$

Opazimo, da je $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ dopolnitev baze $\text{Ker}(A - 2I)$ do baze $\text{Ker}(A - 2I)^2$

in da je $(A - 2I) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ linearno neodvisen od $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Torej imamo naslednjo situacijo.



Jordanske verige zložimo v matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vsaki jordanski verigi dolžine k pripada ena jordanska kletka velikosti $k \times k$. Torej je jordanska kanonična forma matrike A enaka

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matriko A torej lahko izrazimo kot

$$A = PJP^{-1}.$$

7. Funkcije matrik

Če poznamo razcep $A = PJP^{-1}$ matrike A , potem se računanje potenc matrike A prevede na računanje potenc matrike J , saj velja

$$A^n = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) \dots (PJP^{-1}) = PJ^nP^{-1}.$$

Ker je J bločno diagonalna matrika sestavljena iz Jordanskih kletk, se potenciranje matrike J prevede na potenciranje Jordanskih kletk.

Potenciranje matrik je uporabno pri reševanju linearnih rekurzivnih enačb.

Primer sistema linearnih rekurzivnih enačb

$$x_{n+1} = -4x_n + 4y_n, \quad x_0 = 0$$

$$y_{n+1} = -x_n, \quad y_0 = 1.$$

Najprej sistem zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Odtod sledi

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kot v prejšnjem razdelku izračunamo jordansko kanonično formo za A

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

S popolno indukcijo pokažemo, da je

$$J^n = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Odtod sledi, da je

$$\begin{aligned} A^n &= P J^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2)^n - 2n(-2)^{n-1} & 4n(-2)^{n-1} \\ -n(-2)^{n-1} & (-2)^n + 2n(-2)^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kar lahko še naprej poenostavimo. Če A^n pomnožimo z $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, dobimo

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4n(-2)^{n-1} \\ (-2)^n + 2n(-2)^{n-1} \end{bmatrix} = (-2)^n \begin{bmatrix} -2n \\ 1 - n \end{bmatrix}$$

Oglejmo si, kako izračunamo potenco jordske kletke.

Formula za potenco $k \times k$ jordske kletke

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Dokaz: Jordansko kletko lahko zapišemo v obliki $\lambda I + N$, kjer je N matrika, ki ima na prvi naddiagonali same enke, drugod pa same ničle. Potence matrike N je preprosto izračunati. Opazimo, da je N^i matrika, ki ima na i -ti naddiagonali same enke, drugod pa same ničle. Ker je N $k \times k$ matrika, nima k -te naddiagonale, zato je $N^k = 0$. Po binomski formuli

$$(\lambda I + N)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \lambda^{n-i} N^i = \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} N^i \quad \square$$

Iz Analize vemo, da se dajo številne funkcije izraziti s potenčno vrsto, recimo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ali lahko našo metodo za računanje potenc matrike posplošimo na potenčne vrste? Izkaže se, da lahko. Vzemimo recimo funkcijo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

in vstavimo $A = PJP^{-1}$ namesto x . Dobimo

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P J^n P^{-1} = P \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n J^n \right) P^{-1} = P f(J) P^{-1}$$

Računanje $f(J)$, kjer je J jordanska matrika, lahko prevedemo na primer, ko je J jordanska kletka. Velja namreč

$$f\left(\begin{bmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_m \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(J_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f(J_m) \end{bmatrix}.$$

Pri računanju funkcije jordske kletke si pomagamo z naslednjo formulo.

Formula za funkcijo $k \times k$ jordske kletke

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \dots & \frac{f^{k-1}(\lambda)}{(k-1)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2} \\ \vdots & & & \ddots & f'(\lambda) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

Za $f(x) = x^n$ je to ravno formula za potenco jordske kletke. Ker je formula linearna v funkciji f , odtod sledi, da velja za vse potenčne vrste.

Oglejmo si primer uporabe funkcij matrik. Iz Analize vemo, da je funkcija $y(t) = ce^{at}$ rešitev diferencialne enačbe $y'(t) = ay(t)$. To nam da idejo za reševanje naslednjega sistema diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= a_{1,1}y_1(t) + \dots + a_{1,d}y_d(t) \\&\vdots \\y_d'(t) &= a_{d,1}y_1(t) + \dots + a_{d,d}y_d(t)\end{aligned}$$

Ta sistem najprej zapišemo v matrični obliki kot

$$\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t).$$

Izkaže se, da je njegova rešitev vektorska funkcija

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{c},$$

kjer je $\mathbf{c}$ konstanten vektor.

Matrično funkcijo e^{At} izračunamo tako, da v funkcijo $f(x) = e^{tx}$ vstavimo A namesto x . Kot zgoraj to prevedemo na primer e^{Jt} , kjer je J jordanska kletka. V tem primeru iz formule za funkcijo jordanske kletke dobimo

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ \vdots & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$