

REŠITVE 1. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
28. januar 2008

1. Preverite, da zaporedje $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ zadošča diferenčni enačbi

$$a_n = n a_{n-1} - \frac{1}{(n+2)}, \quad a_0 = 1/2.$$

Nato predlagajte, kako bi numerično natančno izračunali člene a_i , $i = 0, 1, \dots, 20$.

Rešitev: Preprosti račun

$$n a_{n-1} - \frac{1}{n+2} = n \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = a_n$$

pokaže, da je zaporedje $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ rešitev podane diferenčne enačbe. Hitro se prepričamo, da neposredno računanje po rekurzivni formuli “naprej” ni dobro (odštevanje skoraj enakih števil), saj se napaka pri členih hitro povečuje. Zato rekurzijo zapišemo v obliki

$$a_{n-1} = \frac{1}{n} \left(a_n + \frac{1}{n+2} \right).$$

Za dovolj velik $N > 20$ izberemo na primer $a_N = 0$ in računamo po pravkar zapisani formuli “nazaj”.

2. Iščete ničle funkcije $f(x) = x + 4 - e^{x^2}$. Preverite, da ima f vsaj po eno ničlo na intervalih $[-2, -1]$ in $[1, 2]$ (v resnici ima natanko eno na vsakem intervalu). Nato z neko metodo poiščite ničlo na vsakem od prej omenjenih intervalov na štiri decimalna mesta natančno. Za izbrano metodo zapišite prvi in zadnja dva približka.

Rešitev: Na omenjenih intervalih je res vsaj po ena ničla, saj je $f(-2)f(-1) < 0$ in $f(1)f(2) < 0$. Za iskanje manjše izberemo direktno iteracijo v obliki

$$x_{k+1} = -\sqrt{\log(x_k + 4)}.$$

Če je $x_0 = -1.5$, dobimo, $x_4 = -1.0414$ in $x_5 = -1.0415$. Za večjo ničlo iteracijo prepišemo v obliko

$$x_{k+1} = \sqrt{\log(x_k + 4)}.$$

Pri izbiri $x_0 = 1.5$ dobimo $x_3 = 1.2908$ in $x_4 = 1.2907$.

3. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ poznate njen LU razcep, torej tako spodnje trikotno matriko L z enkami na diagonali in zgornje trikotno matriko U , da je $A = LU$. Podan je še vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Kako bi **učinkovito** izračunali

vektor $(A^T A)^{-1} \mathbf{b}$? Natančno preštejte število potrebnih množenj in deljenj. Predlagani postopek preverite na podatkih

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = (1, 2, 3)^T.$$

Rešitev: Ker je $A = LU$, je $A^T A = U^T L^T LU$. Računanje vektorja $\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} \mathbf{b}$ je ekvivalentno reševanju sistema

$$(U^T L^T L U) \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Opazimo, da ga lahko rešujemo na primer takole

$$\begin{aligned} U^T \mathbf{x}_1 &= \mathbf{b}, \\ L^T \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1, \\ L \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2, \\ U \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_3, \end{aligned}$$

pri čemer je $\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}$. Imamo dve obratni in dve direktni vstavljanji. Če upoštevamo, da ima L enke na diagonali, dobimo

$$2 \left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = 2n^2$$

množenj in deljenj.

4. Robni problem

$$y''(x) + y'(x)^2 - 4y + 2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2,$$

rešujete s strelsko metodo. Za reševanje začetnega problema

$$y''(x) + y'(x)^2 - 4y + 2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \alpha,$$

uporabite Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$. Rešite začetni problem dvakrat, prvič z $\alpha_1 = -1$, drugič z $\alpha_2 = 1$. Predlagajte, kako bi na podlagi izračunanih vrednosti izbrali naslednji približek α_3 .

Rešitev: Z uvedbo vektorske spremenljivke $\mathbf{Y} = (y, y')^T$, diferencialno enačbo drugega reda prevedemo na sistem prvega

$$\mathbf{Y}' = (\mathbf{Y}(2), 4\mathbf{Y}(1) - \mathbf{Y}(2)^2 - 2)^T,$$

Uporabimo Eulerjevo metodo

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Y}_k + h \mathbf{F}(x_k, \mathbf{Y}_k),$$

pri čemer prvič vzamemo $\mathbf{Y}_0 = (1, -1)^T$, drugič pa $\tilde{\mathbf{Y}}_0 = (1, 1)^T$. Dobimo $\mathbf{Y}_2 = (0.25, -0.625)^T$ in $\tilde{\mathbf{Y}}_2 = (2.25, 2.375)^T$. S sekantno metodo določimo α_3 takole

$$\alpha_3 = \alpha_1 + (2 - \mathbf{Y}_2(1)) \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\tilde{\mathbf{Y}}_2(1) - \mathbf{Y}_2(1)} = \frac{3}{4}.$$

REŠITVE 2. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
7. februar 2008

1. Numerično stabilno izračunajte vrednost izrazov

a)

$$\frac{1}{x} \sqrt{e^{x^2} - 1},$$

b)

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \sqrt{1 - x + x^2},$$

za $x = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}, \dots$

Rešitev: Za majhne x pride v obeh formulah do odštevanja skoraj enakih števil, kar povzroči velike numerične napake. Prvo formulo s pomočjo Taylorjeve vrste preuredimo v

$$\frac{1}{x} \sqrt{e^{x^2} - 1} = \sqrt{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots}$$

Za majhne x je več kot dovolj vzeti samo prve tri člene vrste pod korenom, saj za zgoraj navedene vrednosti x dobimo zaporedoma 1.00005, 1.00000, 1.00000 in 1.00000.

Pri drugi formuli pa upoštevamo (za $x > 0$)

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \sqrt{1 - x + x^2} &= \frac{1}{x} \left(\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} \right) \\ &= \frac{1}{x} \frac{2x}{\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2}}. \end{aligned}$$

Za zgoraj navedene x pa tokrat dobimo 0.99996, 0.99999, 1.00000 in 1.00000.

2. Preverite, da ima funkcija

$$f(x) = e^{-2x} - x$$

natanko eno ničlo $\alpha \in [0, 1]$. Nato se prepričajte, da navadna iteracija

$$x_{r+1} = \frac{x_r (1 - \log x_r)}{1 + 2x_r}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

konvergira k ničli α z asimptotičnim redom konvergence vsaj 2 in jo poiščite na 4 decimalna mesta natančno.

Rešitev: Ker je $f(0) = 1 > 0$ in $f(1) = e^{-2} - 1 < 0$, ima f na $[0, 1]$ vsaj eno ničlo. Po drugi strani pa je $f'(x) = -2e^{-2x} - 1 < 0$, kar pomeni, da je f monotonno padajoča in zato ne more imeti več kot ene

ničle.

Naj bo α rešitev zgornje enačbe, torej

$$e^{-2\alpha} - \alpha = 0.$$

Z nekaj preoblikovanja dobimo

$$\log \alpha = -2\alpha, \quad (1)$$

kar bomo uporabili pri nadaljnjih računih. Označimo iterativno funkcijo z

$$g(x) = \frac{x(1 - \log x)}{1 + 2x}.$$

Red konvergence navadne iteracije je p , če je

i)

$$g(\alpha) = \alpha,$$

ii)

$$g^{(q)}(\alpha) = 0, \quad q = 1, 2, \dots, p-1, \quad g^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Če upoštevamo (1), opazimo najprej, da je $g(\alpha) = \alpha$. Z nekaj računanja pridemo do odvodov funkcije g v α , namreč

$$g'(\alpha) = -\frac{2\alpha + \log \alpha}{(1 + 2\alpha)^2} = 0,$$
$$g''(\alpha) = \frac{4\alpha(\alpha - 1) + 4\alpha \log \alpha - 1}{\alpha(1 + 2\alpha)^3} \neq 0.$$

Red konvergence je torej 2.

Če za x_0 izberemo $x_0 = 0.4$, so zaporedni približki naslednji: $x_1 = 0.4258$, $x_2 = 0.4263$, $x_3 = 0.4263, \dots$ Rešitev je torej $\alpha = 0.4263$.

3. Naj bo $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spodnje trikotna matrika z neničelnimi elementi na diagonali in $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Podrobno opišite **ekonomičen** algoritem za računanje vektorja

$$\mathbf{x} = L^T L^{-1} \mathbf{b}.$$

Preštejte točno število množenj in deljenj. Algoritem nato preverite na podatkih

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (0, 0, 3)^T.$$

Rešitev: Računanje vektorja $\mathbf{x}$ razdelimo na dva dela: i) iskanje vektorja $\mathbf{y} = L^{-1} \mathbf{b}$ in ii) $\mathbf{x} = L^T \mathbf{y}$. Predvsem je nedopustno računati inverzno matriko L^{-1} . Namesto tega vektor $\mathbf{y}$ poiščemo kot rešitev sistema

$$L \mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

Ker je L spodnje trikotna matrika, uporabimo direktno vstavljanje. Pri tem naredimo $n(n-1)/2$ množenj in n deljenj. Končni $\mathbf{x}$ dobimo sedaj z neposrednim matričnim množenjem $\mathbf{x} = L^T \mathbf{y}$. Ker je L^T zgornje trikotna matrika, nas to stane le $n(n+1)/2$ množenj. Skupaj torej $n^2 + n$ operacij.

Za posebni primer dobimo rešitev $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$.

4. Iščete ničlo funkcije y , ki je dana kot rešitev začetnega problema

$$y''(t) + \sin(y(t)) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Za začetni približek ničle izberete $t_0 = 1$. Naslednji približek t_1 pa izračunate po Newtonovi metodi. Izračunajte t_1 tako, da za računanje vrednosti $y(t_0)$ in $y'(t_0)$ uporabite Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$.

Rešitev: Nov približek po Newtonovi metodi izračunamo takole

$$t_1 = t_0 - \frac{y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

Zato potrebujemo vrednosti $y(t_0)$ in $y'(t_0)$. Kot namiguje navodilo, bomo njuna približka dobili z Eulerjevo metodo za začetni problem drugega reda. Slednjega najprej spremenimo na sistem prvega reda z novo vektorsko neznanko $\mathbf{Y}(t) = (y(t), y'(t))^T$, od koder dobimo

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}(t)) := [\mathbf{Y}_2(t), -\sin(\mathbf{Y}_1(t))]^T, \quad \mathbf{Y}(0) = [1, 0]^T.$$

Pišimo $\mathbf{Z}(t) \approx \mathbf{Y}(t)$. Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$ v dveh korakih dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(0.5) &= \mathbf{Y}(0) + h \mathbf{F}(0, \mathbf{Y}(0)) = [1, -0.420735]^T, \\ \mathbf{Z}(1) &= \mathbf{Z}(0.5) + h \mathbf{F}(0.5, \mathbf{Z}(0.5)) = [0.789632, -0.841471]^T. \end{aligned}$$

Torej je $y(t_0) = y(1) \approx 0.789632$ in $y'(t_0) = y'(1) \approx -0.841471$. Od tod $t_1 \approx 1.938395$.

REŠITVE 3. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
23. april 2008

1. Preverite, da za integral

$$I_n(\alpha) = e^{-1} \int_0^1 x^{n+\alpha} e^x dx$$

velja rekurzivna relacija

$$I_n(\alpha) = 1 - (n + \alpha) I_{n-1}(\alpha).$$

Izračunajte $I_n(0)$ za $n = 16, 17, \dots, 20$, če veste, da je $I_{15}(0) \approx 0.059$.

Rešitev: Rekurzivno relacijo preverimo z integracijo *per partes*:

$$\begin{aligned} e^{-1} \int_0^1 x^{n+\alpha} e^x dx &= e^{-1} x^{n+\alpha} e^x \Big|_0^1 \\ &- e^{-1} (n + \alpha) \int_0^1 x^{n-1+\alpha} e^x dx = 1 - (n + \alpha) I_{n-1}(\alpha). \end{aligned}$$

Opazimo, da je zaporedje $\{I_n(0)\}_{n=0}^\infty$ padajoče in $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(0) = 0$. Obenem pa rešitev homogene diferenčne enačbe narašča po absolutni vrednosti. Torej lahko pri računanju "naprej" pričakujemo velike numerične napake, kar opazimo, če nekaj členov izračunamo neposredno po rekurziji. Težavam se izognemo tako, da računamo "nazaj". Postavimo $I_N(0) = 0$ za dovolj velik N in računamo $I_{n-1}(0) = (1 - I_n(0))/n$. Več kot dovolj je začeti z $N = 25$. Dobimo $I_{20}(0) = 0.046$, $I_{19}(0) = 0.048$, $I_{18}(0) = 0.050$, $I_{17}(0) = 0.053$, $I_{16}(0) = 0.056$ in $I_{15}(0) = 0.059$.

2. Poiščite tisto vrednost argumenta, pri katerem je dosežena največja vrednost funkcije $f(x) = x \sin x$ na intervalu $[0, 3]$. Rezultat naj bo točen na 3 decimalna mesta.

Rešitev: Funkcija f je na danem intervalu nenegativna. Hitro se prepričamo, da ima odvod $f'(x) = \sin x + x \cos x$ ničlo pri $x = 0$ in nekeje na intervalu $(\pi/2, 3)$. Od tod nujno sledi, da je maksimum dosežen bodisi v ničli odvoda ali na desnem robu, torej pri $x = 3$ (levi rob ni v igri, saj $f(0) = 0$). Ničla odvoda zadošča enačbi $x = -\operatorname{tg}(x)$. Preoblikujemo jo v $x = -\arctg x + \pi$ in rešimo z navadno iteracijo z začetnim približkom $x_0 = 2$. Dobimo zaporedje približkov $x_1 = 2.034$, $x_2 = 2.028$, $x_3 = 2.029 \dots$. Ker je $f(3) < f(x_3)$, je maksimum torej dosežen pri $x = 2.029$.

3. Naj bo $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ neizrojena spodnje trikotna matrika. Napišite **učinkovit** algoritem za izračun matrike L^{-1} . Preštejte število potrebnih operacij (množenj in deljenj). Algoritem preizkusite na matriki

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev: Naj bo $L^{-1} := [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$. Stolpce $\mathbf{y}_i$ določimo tako, da rešujemo sisteme enačb

$$L \mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kjer je $\mathbf{e}_i$ i -ti enotski vektor, torej tak, ki ima povsod ničle, le na mestu i enico. Toda matrika L je spodnje trikotna, zato vsakega od sistemov rešimo z direktnim vstavljanjem. Brez upoštevanja posebne strukture desnih strani dobimo za vsak sistem $n(n+1)/2$ operacij, skupaj torej $n^2(n+1)/2$. Toda desne strani so vektorji, ki imajo na prvih $i-1$ mestih in na zadnjih $n-i$ mestih ničle. Zato se da število operacij zmanjšati. Ko namreč rešujemo konkretni sistem $L \mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i$, takoj sledi, da je $y_1 = y_2 = \dots = y_{i-1} = 0$. Vrednost y_i dobimo z enim deljenjem, ostale pa po klasičnem postopku direktnega vstavljanja, pri čemer za vsako komponento y_j , $j > i$, potrebujemo samo dve operaciji. Skupno število opracij za i -ti sistem je tako $1 + 2(n-i)$. Za vse sisteme skupaj pa

$$\sum_{i=1}^n (1 + 2(n-i)) = n + 2n^2 - n(n+1) = n^2.$$

Za konkretno matriko iz naloge dobimo

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Delec se giblje po krivulji $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))^T$. Ob času $t = 0$ je $\mathbf{r}(0) = (0, 0)^T$ in $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 2)^T$. Z Eulerjevo metodo s korakom $\Delta t = 1/4$ poiščite položaj delca ob času $t = 1/2$, če za pospešek velja

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t) y(t), x(t)^2 \dot{y}(t))^T.$$

Rešitev: Diferencialno enačbo najprej prevedemo na sistem štirih prvega reda. Uvedemo nove spremenljivke $z_1 = x$, $z_2 = \dot{x}$, $z_3 = y$ in $z_4 = \dot{y}$. Če pišemo $\mathbf{Z} = (z_i)_{i=1}^4$, se začetni problem prepiše v

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{Z}(t)) := (z_2(t), z_2(t) z_3(t), z_4(t), z_1(t)^2 z_4(t))^T,$$

kjer je $z_1(0) = z_3(0) = 0$, $z_2(0) = 1$, $z_4(0) = 2$. Eulerjeva metoda je torej

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n + \Delta t \mathbf{F}(t_n, \mathbf{Z}_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Na prvem koraku dobimo $\mathbf{Z}_1 = (1/4, 1, 1/2, 2)^T$, na drugem pa $\mathbf{Z}_2 = (1/2, 9/8, 1, 65/32)^T$. Zato je delec ob času $t = 1/2$ približno na koordinatah $(1/2, 1)^T$.

REŠITVE 4. IZPITA IZ UVODA V NUMERIČNE METODE-FIZIKI
5. september 2008

1. Naj bo

$$a_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^{k-1/2}}{100+t} dt.$$

Preverite, da velja

$$a_k = \frac{1}{2k-1} - 100 a_{k-1}.$$

Izračunajte člene a_k , $k = 11, 12, \dots, 15$, če veste, da je $a_{10} = 4.7188 \times 10^{-4}$.

Namig: Izračunajte $a_k + 100 a_{k-1}$.

Rešitev: Glede na namig izračunamo

$$\begin{aligned} a_k + 100 a_{k-1} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^{k-3/2}}{100+t} (t+100) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{k-3/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(k-1/2)} = \frac{1}{2k-1}. \end{aligned}$$

Računanje “naprej” ne bo numerično stabilno, saj ima ustrezna homogena diferenčna enačba naraščajočo rešitev, medtem ko ima zgornja očitno padajočo rešitev (kar sledi iz integralske reprezentacije a_k). Torej bomo računali “nazaj”

$$a_{k-1} = \frac{\frac{1}{2k-1} - a_k}{100},$$

pri čemer bomo izbrali recimo $a_{20} = 0$. Tako dobimo $a_{20} = 0$, $a_{19} = 2.5641 \times 10^{-4}$, $\dots$, $a_{15} = 3.1958 \times 10^{-4}$, $a_{14} = 3.4163 \times 10^{-4}$, $\dots$, $a_{11} = 4.3082 \times 10^{-4}$ in $a_{10} = 4.7188 \times 10^{-4}$.

2. Za nesingularno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, spodnje trikotno matriko L z enkami na diagonalni in zgornje trikotno matriko U velja $A = LU$. Predlagajte **učinkovit algoritem** za izračun matrike U , če poznate matriki A in L . Koliko množenj in deljenj potrebujete za tak izračun?

Algoritem preverite na matrikah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 4 & 11 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev: Pišimo $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, $L = (\ell_{i,j})_{i,j=1}^n$ in $U = (u_{i,j})_{i,j=1}^n$. Iz zveze $A = LU$ takoj izpeljemo algoritem

```
%prva vrstica U
for j=1:n
    U(1,j)=A(1,j);
```



```

end
%ostale vrstice U
for i=2:n
    for j=i:n
        U(i,j)=A(i,j)-L(i,1:i-1)*U(1:i-1,j);
    end
end
end

```

Deljenj očitno ni, množenj pa

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=2}^n \sum_{j=i}^n (i-1) &= \sum_{i=2}^n (i-1)(n-i+1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \\
 &= n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n^2}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\
 &= \frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2).
 \end{aligned}$$

Za konkretni primer dobimo

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Predlagajte algoritem za izračun ničle funkcije g , za katero je

$$g'(x) = e^{-x^2}, \quad g(0) = -1/2.$$

Ničlo funkcije tudi čim bolj natančno izračunajte.

Namig: Vrednosti $g(x)$ računajte s kakšno preprosto metodo za reševanje diferencialne enačbe.

Rešitev: Zaporedje približkov po Newtonovi metodi je

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{g(x_k)}{e^{-x_k^2}}.$$

Za izračun $g(x_k)$ uporabimo kar trapezno metodo s korakom x_k , torej

$$g(x_k) \approx -\frac{1}{2} + \frac{x_k}{2} (e^{-0} + e^{-x_k^2}).$$

Če izberemo $x_0 = 0.5$, dobimo $x_1 = 0.5710$, $x_2 = 0.5827$, ..., $x_5 = 0.5846$.

Za primerjavo naj omenimo, da je točna ničla enaka 0.551039.

Opomba: Metodo bi lahko takoj izboljšali tako, da bi trapezno metodo na vsakem koraku uporabili na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ in ne vedno na $[0, x_k]$.

4. Začetni problem prvega reda

$$y'(x) = -y(x), \quad y(0) = 1,$$

rešujete z implicitno Eulerjevo metodo

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Preverite, da je analitična rešitev zgornjega problema strogo padajoča funkcija. Kakšen mora biti korak h , da bo tudi zaporedje numeričnih približkov y_k , $k = 0, 1, \dots$, strogo padajoče?

Rešitev: Analitična rešitev začetnega problema je $y(x) = e^{-x}$, torej je očitno strogo padajoča. Implicitna Eulerjeva metoda za konkretni primer je $y_{k+1} = y_k + h(-y_{k+1})$, torej

$$y_{k+1} = (1+h)^{-1}y_k = (1+h)^{-2}y_{k-1} = \dots = (1+h)^{-k-1}y_0 = (1+h)^{-k-1}.$$

Zaporedje numeričnih približkov $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ bo torej strogo padajoče, če je $1+h > 1$, torej $h > 0$.