

1. IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–FIZIKI
14.6.2010

1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 18 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte spodnjo trikotno matriko S in zgornjo trikotno matriko Z z enkami na diagonali, da bo $A = S Z$.

2. Poiščite največjo negativno in najmanjšo pozitivno ničlo funkcije

$$f(x) = e^{-x^2} - \sin x$$

na vsaj tri mesta natančno. Ustrezno metodo za izračun ničle izberite sami. Za vsako od ničel zapišite prvi in zadnja dva približka.

3. Funkcijo $f(x) = \cos x$ interpolirate na intervalu $[0, \pi]$ s polinomom p_5 stopnje ne več kot 5. Poleg vrednosti funkcije v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = \pi$, interpolirate še prvi in drugi odvod funkcije f v teh dveh točkah. Kar se da natančno navzgor ocenite količino

$$\max_{x \in [0, \pi]} |f(x) - p_5(x)|.$$

4. Rešujete začetni problem

$$y'' = -x y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Izračunajte približka za $y'(0.25)$ in $y(0.5)$ z implicitno Eulerjevo metodo

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

s korakom $h = 0.25$.

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh listov formata A4 in kalkulatorja.

2. IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–FIZIKI
31.8.2010

1. Matrika $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je zgornja Hessenbergova, če je $a_{ij} = 0$, za $j < i - 1$. Zapišite **učinkovit** algoritem za LU razcep take matrike. Kolikšen je red velikosti števila potrebnih operacij (utemeljite)?
2. Izvajate iteracijo $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \dots$, kjer je

$$g(x) = \frac{(x+1)e^{-x} + 1}{e^{-x} + 2}.$$

- a) Preverite, da je negibna točka funkcije g ravno rešitev enačbe $e^{-x} = 2x - 1$.
 - b) Določite red konvergence zgornje iteracije k α .
 - c) Izračunajte α na dve mesti natančno.
3. Dana je simetrična tridiagonalna matrika

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte Sturmovo zaporedje za matriko A in določite število lastnih vrednosti na intervalu $[0, 3]$.

4. Delec se giblje v ravnini, njegovo sled pa opisuje krivulja $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Za pospešek delca velja $\ddot{\mathbf{r}} = (x, \sin y)$. Vemo, da je $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ in $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 1)$. Določite položaj delca ob času $t = 0.5$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$.

Nasvet: Zapišite zgornjo diferencialno enačbo drugega reda kot sistem štirih diferencialnih enačb prvega reda.

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba dveh listov formata A4 in kalkulatorja.

3. IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–FIZIKI
13.9.2010

1. Izračunajte razcep Choleskega za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 19 \end{bmatrix}.$$

2. Ničlo nelinearne funkcije $f(x) = \log x + x$ iščete z navadno iteracijo $x_{r+1} = g(x_r)$, $r = 0, 1, \dots$

- a) Izberite funkcijo g tako, da bo navadna iteracija konvergirala k ničli funkcije f z redom konvergence 2. Red konvergence utemeljite!
- (a) Izračunajte ničlo funkcije f na tri decimalna mesta natančno.

3. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= b_3. \end{aligned}$$

- a) Koliko je

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|A\mathbf{x} - (7, 0, 0)^T\|_2?$$

- b) Poiščite tak b_3 , da bo

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \|A\mathbf{x} - (7, 0, b_3)^T\|_2 = 0.$$

4. Rešujete začetni problem $y'' = xy$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Z implicitno metodo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$$

za sistem diferencialnih enačb prvega reda, določite približke za $y(0.2)$, $y'(0.2)$ in $y''(0.2)$, če je $h = 0.2$.