

Integracija racionalnih funkcij

Uros KUZMAN

Želimo računati integrale oblike

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx,$$

kjer sta P in Q polinoma. Izkazalo se bo, da zanje obstaja univerzalni nastavek, do katerega pa se bomo skušali prebiti postopoma.

Trik (1)

Če je $\text{st } Q \geq \text{st } P$, polinoma delimo in zapišemo

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{P(x)}, \quad \text{st } r < \text{st } P.$$

Trik (2)

Če so v P le linearni faktorji prvega reda, uporabimo parcialne ulomke:

$$\frac{Q(x)}{(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}.$$

Primer:

$$I = \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx.$$

$$\begin{array}{r} (x^5 + x^4 - 8) : (x^3 - 4x) = x^2 + x + 4 \\ \underline{x^5 - 4x^3} \\ -x^4 + 4x^3 - 8 \\ \underline{x^4 - 4x^2} \\ 4x^3 + 4x^2 - 8 \\ \underline{4x^3 - 16x} \\ 4x^2 + 16x - 8 \text{ (ostanek)} \end{array}$$

Imamo torej

$$I = \int (x^2 + x + 4) dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + I_1.$$

Integrirati moramo še

$$I_1 = \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} dx.$$

Parcialni ulomki

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{(A+B+C)x^2 + (2B-2C)x - 4A}{x(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)}.$$

$$A + B + C = 4, \quad 2B - 2C = 16, \quad -4A = -8.$$

Dobimo koeficiente $A = 2$, $B = -5$ in $C = -3$ oz.

$$I_1 = 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{x+2} = 2 \ln |x| - 5 \ln |x-2| - 3 \ln |x+2| + C.$$

Trik (3)

Če je v P tudi kak večkraten linearen člen $\frac{1}{(x-a)^k}$, med parcialne ulomke vključimo vse njegove potence

$$\dots + \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots$$

Primer:

$$I = \int \frac{2x + 3}{x^3(x + 1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x + 1} + \frac{E}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{(A + D)x^4 + (2A + B + D + E)x^3 + (A + 2B + C)x^2 + (B + 2C)x + C}{x^3(x + 1)^2} \\ &= \frac{2x + 3}{x^3(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Dobimo: $A = 5$, $B = -4$, $C = 3$, $D = -5$ in $E = -1$.

$$\begin{aligned} I &= 5 \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2} + 3 \int \frac{dx}{x^3} - 5 \int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2} = \\ &= 5 \ln |x| + \frac{4}{x} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2} - 5 \ln |x + 1| + \frac{1}{x + 1} + \text{F} \end{aligned}$$

UPORABIMO F, KER SMO
A, B, C, D, E ŽE ZGORAJ

Trik (Univerzalni nastavek za linearne člene)

Namesto razčlenjanja pred integracijo lahko skušamo predvideti rezultat in konstante določimo z odvajanjem:

$$\int \frac{Q(x)}{(x-a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-a_n)^{k_n}} dx = C_1 \ln |x-a_1| + \dots + C_n \ln |x-a_n| + \frac{\tilde{Q}(x)}{\tilde{P}(x)},$$

kjer je

$$\tilde{P}(x) = (x-a_1)^{k_1-1} \cdot \dots \cdot (x-a_n)^{k_n-1},$$

polinom $\tilde{Q}(x)$ pa ima neznane koeficiente in stopnjo st $\tilde{Q} = \text{st } \tilde{P} - 1$.

Opomba: Predpostavili smo, da $\text{st } Q < \text{st } P$, sicer predhodno delimo.

Obravnavajmo isti primer

$$I = \int \frac{2x + 3}{x^3(x + 1)^2} dx.$$

Nastavek bo

$$\int \frac{2x + 3}{x^3(x + 1)^2} dx = A \ln x + B \ln(x + 1) + \frac{Cx^2 + Dx + E}{x^2(x + 1)} + \text{konst.}$$

Konstante določimo z odvajanjem te vrstice

$$\frac{2x + 3}{x^3(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} - \frac{Cx^3 + 2Dx^2 + (D + 3E)x + 2E}{x^3(x + 1)^2}.$$

Domača naloga: Preveri, da dobiš isti rezultat!