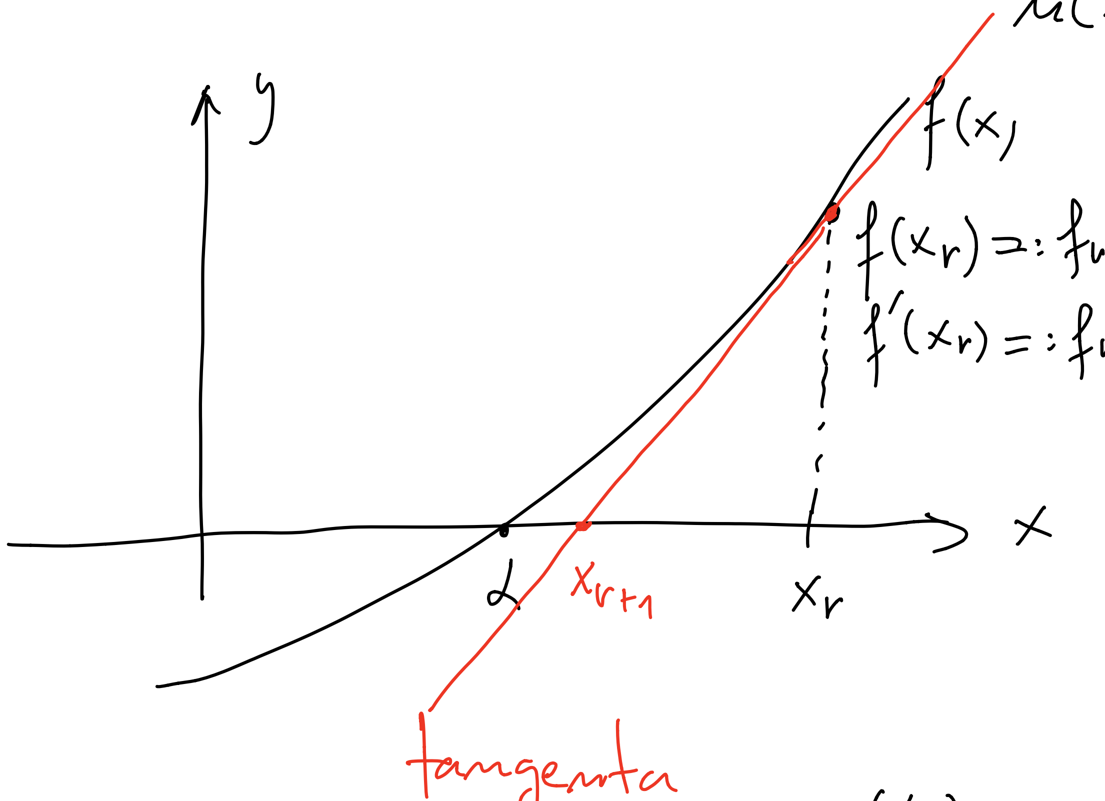
Tangentna (Newtonova) metoda

$$f(x)=0 \iff x = g(x) = x - h(x)\cdot f(x)$$

$h(x) \neq 0$



$$x_{r+1} = \underbrace{x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}}_{=:g(x_r)} = x_r - \frac{f_r}{f_r'}\,; \quad r=0,1,\ldots$$

Red konvergence?

Trditev: Če je α enostavna ničla funkcije f, je red konvergence vsaj 2.

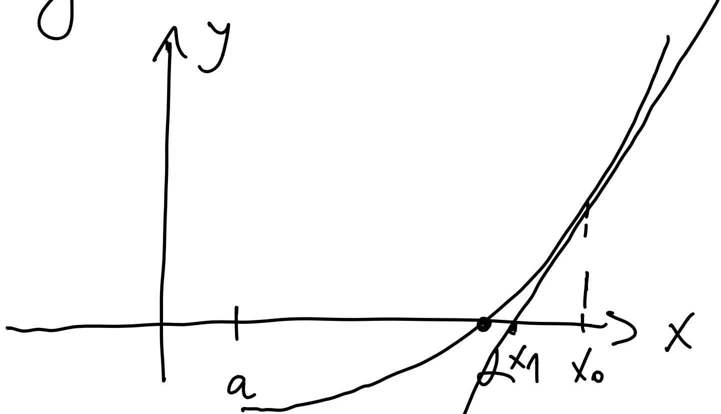
Če pa je α večkratna ničla, je red

konvergence linearen.
(Ob pogoju, da metoda konvergira.)

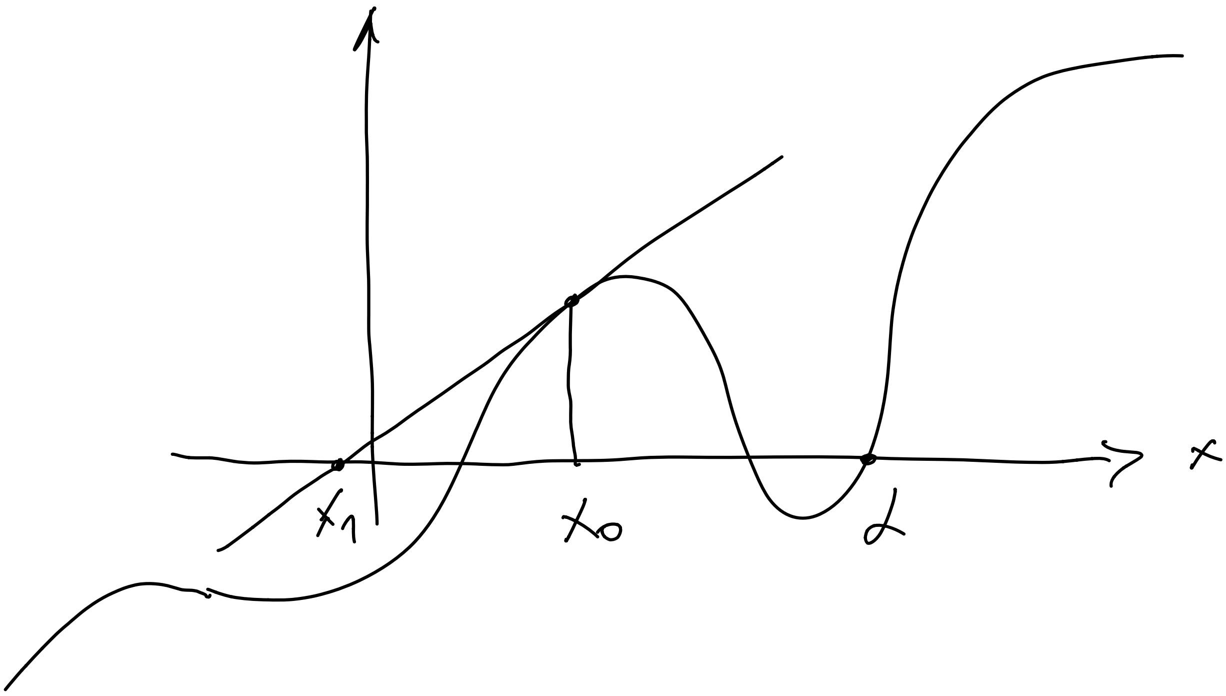
<u>Izrek</u>: Naj bo α enostavna ničla dvakrat zvezno odvedljive funkcije f. Potem obstaja okolica I točke α in konstanta $C>0$, da tangentna metoda konvergira za vsak $x_0 \in I$ ter približki x_r zadoščajo oceni

$$|x_{r+1} - \alpha| \leq C(x_r - \alpha)^2.$$

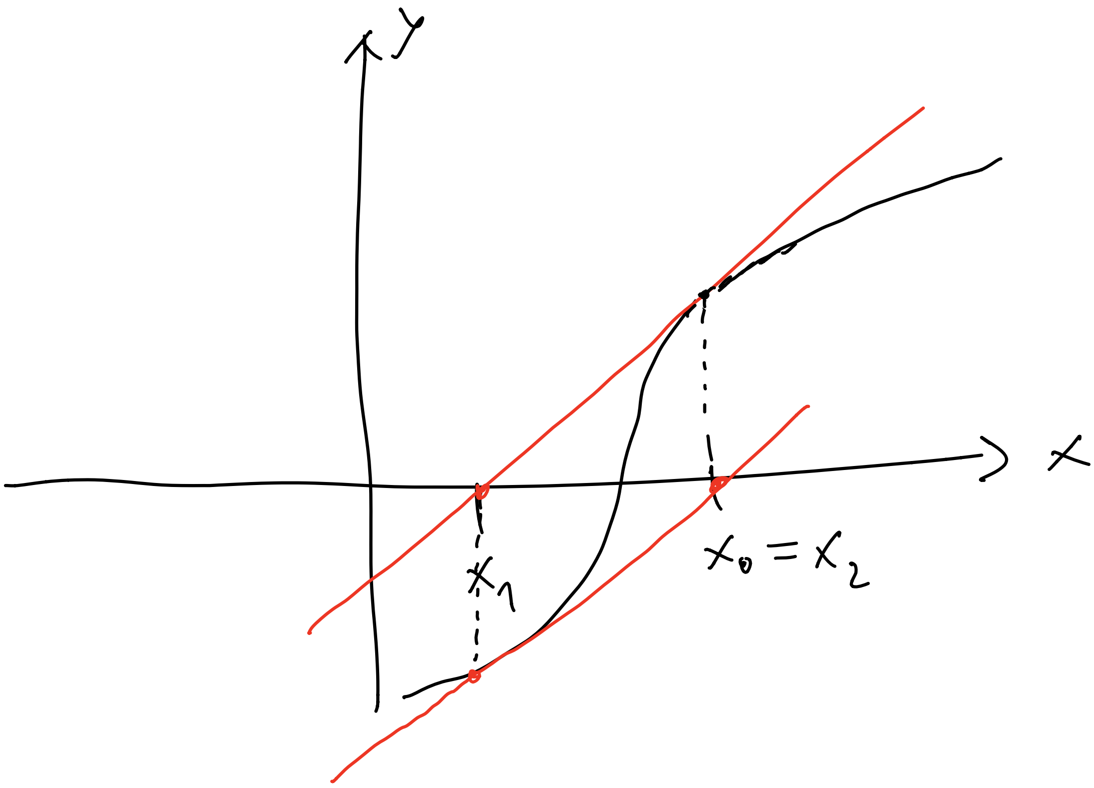
<u>Trditev</u>: Naj bo f na $I = [a, \infty)$ dvakrat zvezno odvedljiva, naraščajoča in konveksna, ki ima ničlo $\alpha \in I$. Potem je α edina ničla in za vsak $x_0 \in I$ tangentna metoda konvergira k α.



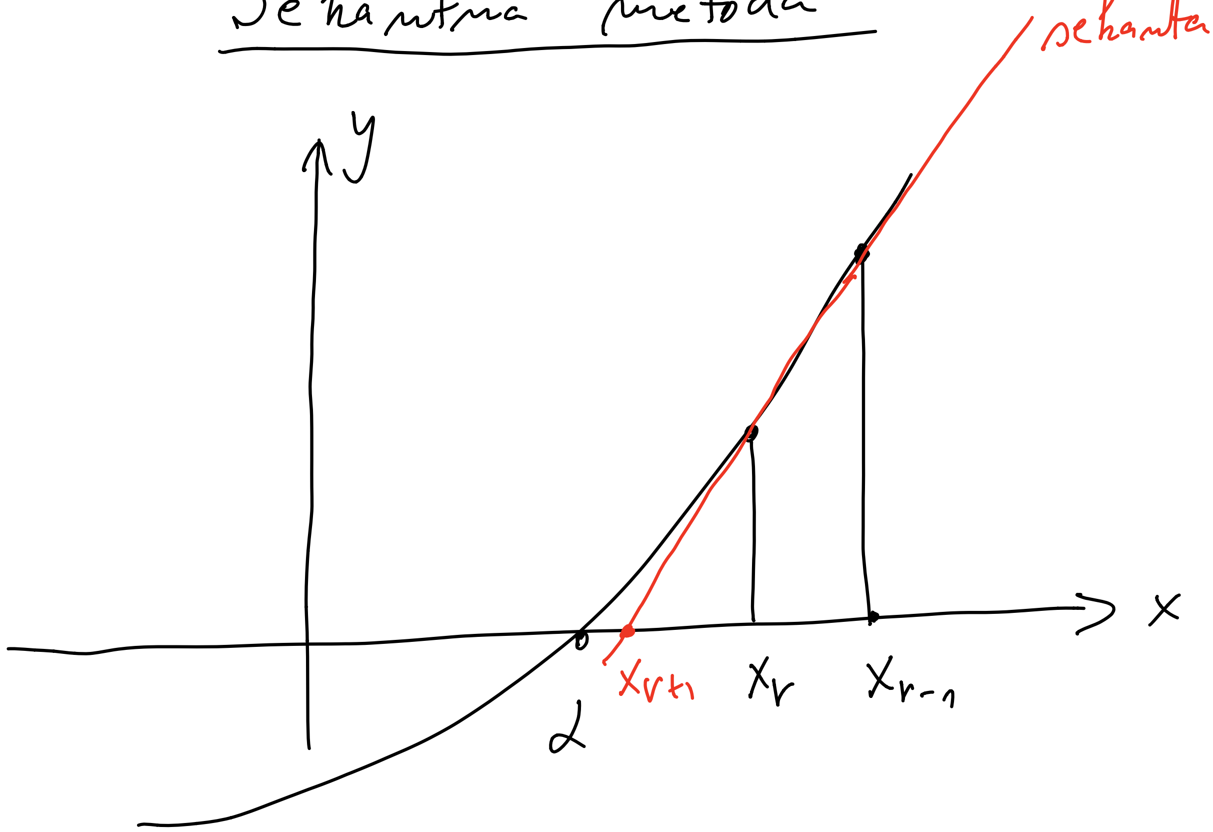
V splošnem nimamo nujno konvergence!



Ciklično zaporedje:



Sekantna metoda



$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})} \quad ; r = 0, 1, \ldots$$

Ta metoda ni primer navadne iteracije.

Red konvergence je $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \doteq 1{,}62$.

Še nekaj metod:

1. Mullerjeva metoda: parabola skozi zadnje tri točke.

2. Inverzna interpolacija: inverzno funkcijo aproksimiramo s parabolo in stanemo vrednost aproksimanta

v točki 0.

③ Metoda (f, f', f''): pri izračunu novega približka uporabimo f, f', f''.

④ Kombinirana Brentova metoda:

inverzna interpolacija, bisekcija in sekantna metoda $\to$ fzero.

Polinomske enačbe

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Lahko uporabimo katerokoli od prej omenjenih metod, a koje je izpeljati specifične metode.

Za polinomsko enačbo lahko poiščemo vse ničle (Horner).

Problem: vrstni red izločanja ničel.

Problem lahko prevedemo na iskanje lastnih vrednosti neke matrike.

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & \cdots & & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix}$$

Matrika A_n je <u>pridružena matrika</u> k polinomu p in ima lastne vrednosti, ki so ravno ničle p.

Nekatere druge metode: Laguerreova, Bairstow-Hitchcockova, Durand-Kernerjeva, ...

<u>Sistemi nelinearnih enačb</u>

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$\vdots$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Pišemo: $F(X) = \mathbf{0}$, kjer je

$F = (f_1, \dots, f_n)^T$, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ in

$\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$. $\Rightarrow$

$$F(X) = 0 \iff X = G(X)$$

Izvajamo iteracijo $X^{(r+1)} = G(X^{(r)})$; $r = 0, 1, \dots$

<u>Izrek</u>: Če obstaja območje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z lastnostima:

a) $X \in \Omega \Rightarrow G(X) \in \Omega$

b) $X \in \Omega \Rightarrow \rho(J_G(X)) \leq q < 1$,

kjer je $J_G(X)$ Jacobijeva matrika funkcije G v X:

$$J_G(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x) \\ \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

in ρ spektralni radij matrike,

potem ima G v Ω natanko

eno negibno točko α $(G(\alpha) = \alpha)$ in

zaporedje $x^{(r+1)} = G(x^{(r)})$ konvergira

za $\forall x^{(0)} \in \Omega$.

Opomba: Če je $n=1$ $\Rightarrow$

$J_G(x) = [g'(x)]$.

<u>Posledica</u>:

Za konvergenco zadošča:

a) $x \in \Omega \Rightarrow G(x) \in \Omega$

b) $\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X) \right| \leq \mu < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Veja: $\| x^{(k)} - \alpha \|_\infty \leq \frac{\mu^k}{1-\mu} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty$