**Dokaz izreka o markiranju homogenega Poissonovega procesa**

Tu bomo sedaj dokazali naslednji izrek s prosojnic:

**Izrek 1.** *Naj bo $(N_t)_{t\geq 0}$ homogen Poissonov proces in $(X_i)_{i\geq 0}$ zaporedje d-razsežnih markacij s skupnim zakonom $\mu$ na $\mathbb{R}^d$. Z $\nu$ označimo produktno mero na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, kjer je prvi faktor $\lambda$-večkratnik Lebesguove mere na $[0,\infty)$, drugi faktor pa zakon $\mu$ na $\mathbb{R}^d$, definirano z*

$$\nu(ds, dx) = \lambda \mathbb{1}_{s>0} ds \otimes d\mu(x),$$

*(t.j., za produktno množico oblike $A = [a, b] \times C$, $0 \leq a < b$, $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, je $\nu(A) = \lambda(b-a)\mu(C)$).*

*Naj bodo $A_1, \dots A_m \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ paroma disjunktne ($A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) Borelovo merljive množice, omejene v časovni komponenti ($A_i \subset [0, T] \times \mathbb{R}^d, \forall i$, za nek $T > 0$). Naj bo $N(A_i) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{(S_k, X_k) \in A_i\}}$, $1 \leq i \leq m$.*

*Potem velja, da je slučajni vektor*

$$(N(A_1), N(A_2), \dots, N(A_m))$$

*vektor z neodvisnimi komponentami in*

$$N(A_i) \overset{(d)}{=} Pois(\nu(A_i)), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Dokaz. Izračunali bomo karakteristično funkcijo slučajnega vektorja $(N(A_1), \dots, N(A_m))$, to je

$$\varphi(t_1, \dots, t_m) = \mathbb{E}\left(\exp(i \sum_{j=1}^{m} t_j N(A_j))\right), \quad (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m.$$

V ta namen definirajmo za $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ funkcijo

$$f(s, x) = \sum_{j=1}^{m} t_j \mathbb{1}_{A_j}(s, x), \quad s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Ker so po prepostavkah množice $A_j$ paroma disjunktne, je vrednost te funkcije na $A_j$ enaka $t_j$, na komplementu unije pa 0. Iz definicije $N(A_j)$ sedaj sledi

$$\varphi(t_i, \dots, t_m) = \mathbb{E}\left(\exp(i \sum_{n\geq 1} f(S_n, X_n))\right).$$

Sedaj bomo uporabili dejstvo, da so v časovni komponenti vse množice $A_j$ omejene s $T$, da je $N_T \overset{(d)}{=} Pois(\lambda T)$ in da je, po lastnosti vrstilnih statistik, pogojno na $\{N_t = k\}$, $k \geq 1$, vektor časov skokov $(S_1, \dots, S_k)$ porazdeljen kot vektor vrstilnih statistik $(U_{(1)}, \ldots, U_{(k)})$ vektorja $(U_1, \ldots, U_k)$ $k$ neodvisnih $EZ[0,T]$-porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Tako s pogojevanjem na $N_T$ in upoštevanjem formule za popolno matematično upanje velja

$$\varphi(t_1, \ldots, t_m) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{n\geq 1} f(S_n, X_n)\right)|N_T\right)\right) =$$

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{n\geq 1} f(S_n, X_n)\right)|N_T = k\right) e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!} =$$

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left(\exp\left(i\sum_{n=1}^{k} f(S_n, X_n)\right)|N_T = k\right) e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!} =$$

$$e^{-\lambda T}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\mathbb{E}\left(\exp(i\sum_{n=1}^{k} f(U_{(n)}, X_n)\right), \tag{1}$$

kjer smo upoštevali, da zaradi neodvisnosti procesa $(N_t)_{t\geq 0}$ od zaporedja markacij $(X_i)_{i\geq 1}$, pogoj $\{N_T = k\}$ ne vpliva na porazdelitev markacij. Iz istega razloga opazimo tudi, da je vektor $((U_{(1)}, X_1), \ldots, (U_{(k)}, X_k))$, ki je enak vektorju

$$((U_{\sigma(1)}, X_1), (U_{\sigma(2)}, X_2), \ldots, (U_{\sigma(k)}, X_k))$$

za neko permutacijo $\sigma$ množice $\{1, 2, \ldots, k\}$, enako porazdeljen kot

$$((U_{\sigma(1)}, X_{\sigma(1)}), (U_{\sigma(2)}, X_{\sigma(2)}), \ldots, (U_{\sigma(k)}, X_{\sigma(k)})).$$

Z drugimi besedami: v porazdelitvi je vseeno, ali $k$ prihodov in njihovih markacij pogojno na $\{N_T = k\}$ posimuliramo tako, da najprej izžrebamo $k$ neodvisnih $EZ[0,T]$, jih razvrstimo po velikosti, da dobimo simulacijo časov prihodov do časa $T$ in jih šele naknadno markiramo z zaporedjem $X_1, \ldots, X_k$ neodvisnih enako porazdeljenih markacij, ali pa izžrebane neodvisne $EZ[0,T]$-porazdeljene slučajne spremenljivke najprej opremimo vsako s svojo markacijo in potem nastale vektorje parov razvrstimo glede na prvo komponento.

Opazimo še, da je, ker v integrandu nastopi vsota, vrstni red sumandov povsem nepomemben. Tako z upoštevanjem neodvisnosti in enake porazdeljenosti lahko (1) zapišemo kot

$$e^{-\lambda T}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\mathbb{E}\left(\exp(i\sum_{n=1}^{k} f(U_n, X_n))\right) =$$

$$= e^{-\lambda T}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\mathbb{E}(\exp(if(U_1, X_1))\cdots\mathbb{E}(\exp(if(U_k, X_k)) \tag{2}$$

$$= e^{-\lambda T}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda T)^k}{k!}\left(\mathbb{E}\left(\exp(if(U, X)\right)\right)^k = e^{-\lambda T}\exp(\lambda T\mathbb{E}\left(\exp(if(U, X)\right)). \tag{3}$$

Kjer sta $U \overset{(d)}{=} EZ[0,T]$ in $X \overset{(d)}{=} X_1$ neodvisna.

Torej je izraz v (3) enak

$$e^{-\lambda T} \exp\left(\lambda \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} e^{if(u,x)} du d\mu(x)\right). \tag{4}$$

Ker lahko zapišemo $e^{-\lambda T} = \exp(-\lambda \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} du d\mu(x))$, lahko (4) preoblikujemo v

$$\exp\left(-\lambda (\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} (1 - e^{if(u,x)}) du d\mu(x))\right).$$

Sedaj opazimo, da je vrednost funkcije $1 - e^{if(u,x)}$ enaka 0 izven unije množic $A_j$ in enaka $1 - e^{it_j}$ na množici $A_j$, kar pomeni

$$1 - e^{if(u,x)} = \sum_{j=1}^{m} (1 - e^{it_j}) \mathbb{1}_{A_j}.$$

Z upoštevanjem te opazke tako dobimo, da je

$$\varphi(t_1, \ldots, t_m) = \exp\left(-\lambda (\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{m} (1 - e^{it_j}) \mathbb{1}_{A_j} du d\mu(x)\right) =$$

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{m} (1 - e^{it_j}) \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{A_j}) du d\mu(x)\right) =$$

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{m} (1 - e^{it_j}) \nu(A_j)\right) = \prod_{j=1}^{m} \left(\exp(-\nu(A_j)(1 - e^{it_j}))\right). \tag{5}$$

Kar nam še ostane je, da opazimo, da je rezultat, ki smo ga dobili v (5) točno karakteristična funkcija slučajnega vektorja $(Z_1, \ldots, Z_m)$, čigar komponente so neodvisne in $Z_j \overset{(d)}{=} Pois(\nu(A_j))$, $1 \leq j \leq m$. Ker karakteristična funkcija povsem določa porazdelitev slučajnega vektorja, je s tem izrek dokazan.