

LINEARNA ALGEBRA 2020/21

21. VAJE: 24. 3. 2021

1. Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrik.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b \neq 0) \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}$$

2. Izračunaj lastne vrednosti, karakteristični in minimalni polinom matrike

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

če je $a_2 = \cdots = a_k = 0$ in $a_{k+1} \neq 0$.

3. Za matriko A velja $A^{-1} = I + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}A^2$. Določi lastne vrednosti matrike A . Ali se matriko da diagonalizirati?
4. Naj bo V invarianten prostor za preslikavo A . Pokaži, da karakteristični (minimalni) polinom zožane preslikave $A|_V$ deli karakteristični (minimalni) polinom preslikave A .
5. Naj bo $A \in M_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ matrika za katero velja $A^2 = 0$. Pokaži, da je A podobna $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
6. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ neničelna in $A^2 = 0$. Pokaži, da je $\text{im}(A) \subset \ker(A)$ in $1 \leq \text{rang}(A) \leq \frac{n}{2}$.

7. Naj bo V vektorski prostor in P neničeln endomorfizem, z minimalnim polinomom $x^2 - x$.

Pokaži, da je $V = \text{im } P \oplus \ker P$.

8. Zapiši vse možne Jordanove forme matrike, če sta karakteristični in minimalni polinom:

a) $p(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2, m(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^2$.

b) $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^4, m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

c) $p(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^3(\lambda - 1), m(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 3)^2$ in ima preslikava 5 LN lastnih vektorjev.

LINEARNA ALGEBRA, 2020/21
21. VAJE: 24. 3. 2021

3. Izraz $A^{-1} = I + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}A^2$ pomnožimo z $4A$ in vse člene prestavimo na eno stran. Dobimo

$$A^3 - A^2 - 4A + 4I = 0,$$

torej je A ničla polinoma $q(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4$ zato $m_A | q$. Ničle minimalnega polinoma so lastne vrednosti, zato so ničle polinoma q edine možne lastne vrednosti. Ničle polinoma q so $-2, 1$ in 2 .

Ker so ničle polinoma q enostavne, so tudi ničle minimalnega polinoma enostavne. To pa pomeni, da ima A diagonalizacijo.

4. Najprej za splošni polinom pokažemo $q(A|_V) = q(A)|_V$. Iz tega sledi $m_A(A|_V) = m_A(A)|_V = 0|_V = 0$ torej $m_{A|_V} | m_A$.

Izberemo bazo B_1 prostora V jo dopolnimo do baze B celotnega prostora. Matrika, ki pripada preslikavi A v tej bazi je bločno zgornje trikotna. Prvi diagonalni blok je matrika preslikave $A|_V$ v bazi B_1 . Ker je karakteristični polinom bločno diagonalne matrike produkt karakterističnih polinomov diagonalnih blokov, rezultat o deljivosti sledi.

1. Izračunaj karakteristični in minimalni polinom matrik.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b \neq 0) \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & -b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}$$

$A: V \rightarrow V$ endomorfizem v.p. nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ (matrika)

P_A - karakteristični polinom
 $P_A(\lambda) = \det([A]_B - \lambda I)$
 $\downarrow$
 poljubna baza

W_A - minimalni polinom
 polinom najmanjše stopnje, z vodilnim koeficientom 1
 za katerega je $W_A(A) = 0$

- podobne matrike imajo iste karakteristične/minimalne polinome
- $W_A \mid P_A$ (deli) (posledica CH-izreka $P_A(A) = 0$)
- W_A, P_A imata enake (iste?) ničle

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3$$

Polinomi, ki delijo $-\lambda^3$ in imajo enake ničle so:

$$\lambda, \lambda^2, \lambda^3$$

$$A \neq 0, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = 0$$

$$W_A(A) = \lambda^3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_B = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 1 \\ \lambda & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$P_B = -\lambda^2(\lambda-3) \rightarrow \text{kandidati za } W_A \quad \lambda(\lambda-3) \quad \lambda^2(\lambda-3)$$

$$B(B-3I) = 0$$

$$W_A = \lambda(\lambda-3)$$

Alternativni izračun w_B

- matrica A ima diagonalizaciju $\Leftrightarrow$ minimalni polinom w_A ima enostavne ničle (polinom je separabilan)



obstaja baza sestavljena iz lastnih vektorjev

l. vrednost (3) (0) (2)

l. vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ so lastni vektorji matrice B + so lin. neodvisni

$\Rightarrow$

$$w_B = \lambda(\lambda-2)$$

$$C_n = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & -b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrica
 $b \neq 0$

$$D_n = \det(C_n - \lambda I)$$

Indukcija

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & & -b \\ & a-\lambda & \vdots \\ & & \ddots & -b \\ b & b & & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda) D_{n-1} + (-1)^n b \cdot \det \begin{bmatrix} & & & -b \\ & a-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & -b \\ & b & & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda) D_{n-1} + b^2 (a-\lambda)^{n-2}$$

$\begin{matrix} \text{nesto} & \text{prebrskaj } b \\ \nearrow & \nearrow \\ n-1 & +1 \end{matrix}$

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & & & \\ & a-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & a-\lambda \\ b & & & & b \end{bmatrix} = (-1)^n b (a-\lambda)^{n-2}$$

2x2

$$D_2 = \begin{bmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$

$$D_3 = (a-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2) + b^2(a-\lambda) = (a-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 2b^2)$$

$$D_4 = (a-\lambda)^2(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 2b^2) + b^2(a-\lambda)^2 = (a-\lambda)^2(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + 3b^2)$$

$$D_n = (a-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + (n-1)b^2) \quad q_n = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + (n-1)b^2$$

$$q_n(a) = (n-1)b^2 \quad + \quad \text{diskriminanta } q_n = -4(n-1)b^2 \neq 0 \Rightarrow q_n \text{ ima dve različni ničli (nad } \mathbb{C})$$

$$w_{\mathbb{C}} = (\lambda - a)^2 (\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + (n-1)b^2) \quad \text{za nek } 1 \leq k \leq n-2.$$

$$\bullet w_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{h_1} (\lambda - \lambda_2)^{h_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{h_n}$$

$$h_i \text{ je najmanjše število za katero je } \ker(A - \lambda_i I)^{h_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{h_i+1}$$

$$(n \text{ najmanjše število za katero je } \ker(A - \lambda_i I)^{h_i} \text{ korenzbi podprostor})$$

$$\text{zanimas } \dim \ker(C_n - aI)$$

$$\dim \ker \begin{bmatrix} & -b & & \\ & \vdots & & \\ & -b & & \\ b & & \ddots & b \\ & & & 0 \end{bmatrix} = n - \text{rang} \begin{bmatrix} & -b & & \\ & \vdots & & \\ & -b & & \\ b & \dots & b & 0 \end{bmatrix} = n-2$$

$$\dim \ker(C_n - aI) = \text{alg. večkratnost lv. } a, \Rightarrow \text{lastni podprostor je enak korenzbi}$$

$$w_{C_n} = (\lambda - a)(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + (n-1)b^2)$$

2. Izračunaj lastne vrednosti, karakteristični in minimalni polinom matrike

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \end{bmatrix},$$

če je $a_2 = \cdots = a_k = 0$ in $a_{k+1} \neq 0$.

lastna vrednost je a_1 (n -kratna)

$$P_A = (a_1 - \lambda)^n$$

$$k+1 \leq n+1$$

Iščemo kdaj je $(A - a_1 I)^k = 0$

Naj bo $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ matrika z lastnostjo

$$j < i+s \Rightarrow b_{ij} = 0$$


in $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ matrika z lastnostjo

$$j < i+r \Rightarrow c_{ij} = 0$$



Poten imamo $C \cdot B = D = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ lastnost

$$j < i+r+s \Rightarrow d_{ij} = 0$$



Naj bo $j < i+r+s$
$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{i+s-1} b_{ik} c_{kj} + \sum_{k=i+s}^n b_{ik} c_{kj}$$

(vsi $k < i+r$) (za vse $k \geq i+s$ in $j < i+r+s \Rightarrow j < i+r+s \leq k+r$)

Naj bo $\tilde{A} = A - a_1 I$. $\tilde{A}$ ima lastnost $j < i+k \Rightarrow \tilde{a}_{ij} = 0$

$\tilde{A}^{(m)} = (\tilde{a}_{ij}^{(m)})$ ima lastnost $j < i+m \Rightarrow \tilde{a}_{ij}^{(m)} = 0$

če je $m \cdot k \geq n$ potem je $j < i+m \cdot k$ za poljubno $j=1, \dots, n \Rightarrow \tilde{A}^{(m \cdot k)} = 0$

Iščemo najmanjši m za katerega je $m \cdot k \geq n \leadsto m \geq \frac{n}{k} \rightarrow \boxed{m = \lceil \frac{n}{k} \rceil}$

Pokažimo namreč da $\tilde{A}^{(m-1)} \neq 0$ (za $k \leq n$)
 $\tilde{a}_{j, j+k} = a_{j+1} \neq 0$

$$\tilde{a}_{j, j+2k}^{(2)} = \sum_{l=1}^n \tilde{a}_{jl} \tilde{a}_{l, j+2k} = \sum_{l=1}^{j+k-1} \tilde{a}_{jl} \tilde{a}_{l, j+2k} + \underbrace{\tilde{a}_{j, j+k}}_{(a_{j+1})^2} \tilde{a}_{j+k, j+2k} + \sum_{l=j+k+1}^n \tilde{a}_{jl} \tilde{a}_{l, j+2k} = (a_{j+1})^2$$

$j+2k \leq n$, če je

za $m < \bar{m}$ je $\tilde{a}_{j, j+m}^{(m)} = a_{j+1}^m \neq 0$ + obstaja j , da je $j+m \leq n$ (ker je $m < n$)

indukcija

$$\tilde{a}_{j, j+m}^{(m)} = \sum_{l=1}^m \tilde{a}_{j, l}^{(m-1)} \tilde{a}_{l, j+m}^{(m-1)} = \sum_{l=1}^{j+m-1} \tilde{a}_{j, l}^{(m-1)} \tilde{a}_{l, j+m}^{(m-1)} + \underbrace{\tilde{a}_{j, j}^{(m-1)} \tilde{a}_{j+1, j+m}^{(m-1)}}_{\parallel a_{j+1}^{m-1} a_{j+1}^m = a_{j+1}^m} + \sum_{l=j+1}^m \tilde{a}_{j, l}^{(m-1)} \tilde{a}_{l, j+m}^{(m-1)} = a_{j+1}^m$$

Torej je $\tilde{A}^{n-1} \neq 0$ in $\tilde{A}^n = 0$

$$w_A(\lambda) = (\lambda - a_1)^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

primari

$n=2 \quad k=1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow w_A = \lambda^2$$

$n=3 \quad k=2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^3$$

$n=3 \quad k=1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^3$$

...

$n=4 \quad k=2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda^4$$

potencialne

3. Za matriko A velja $A^{-1} = I + \frac{1}{4}A - \frac{1}{4}A^2$. Določi lastne vrednosti matrike A . Ali se matriko da diagonalizirati?

$$X^{-1} = 1 + \frac{1}{4}X - \frac{1}{4}X^2$$

$$1 = X + \frac{1}{4}X^2 - \frac{1}{4}X^3$$

$$q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

$$q(x) = (x-1)(x+2)(x-2)$$

$$q(A) = 0 \quad w_A \mid q$$

Potencialne lastne vrednosti so

$$-2, 1, 2$$

Da, matrika A ima diagonalizacijo, hčr vosa imeti m_A samo enostavne ničle (q ima samo enostavne ničle)

4. Naj bo V invarianten prostor za preslikavo A . Pokaži, da karakteristični (minimalni) polinom zožane preslikave $A|_V$ deli karakteristični (minimalni) polinom preslikave A .

$$A: U \rightarrow U \quad A|_V: V \rightarrow V$$

$$\textcircled{1} \quad m_{A|_V} \mid m_A$$

q -polinom V je invarianten za $q(A)$ in $q(A|_V) = q(A)|_V$

Pokaži moramo $m_A(A|_V) = 0$

$$m_A(A|_V) = m_A(A)|_V = 0|_V$$

$$\textcircled{2} \quad p_{A|_V} \mid p_A$$

$$U = V \oplus W \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \text{poljuben komplement} \end{matrix}$$

$$B = B_V \cup B_W \text{ --- rebramo bato}$$

$$[A]_B = \begin{bmatrix} [A|_V]_B & * \\ 0 & [X] \end{bmatrix}$$

$$p_A = p_{A|_V} \cdot p_X \Rightarrow p_{A|_V} \mid p_A$$

$$\text{Oe je } A = \begin{bmatrix} c & * \\ 0 & D \end{bmatrix}, \text{ potem}$$

$$m_A \text{ ni nujno enak } m_c \cdot m_D.$$

$$\text{Velja pa } m_A \mid m_c \cdot m_D$$

5. Naj bo $A \in M_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ matrika za katero velja $A^2 = 0$. Pokaži, da je A podobna $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ali $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
6. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$ neničelna in $A^2 = 0$. Pokaži, da je $\text{im}(A) \subset \ker(A)$ in $1 \leq \text{rang}(A) \leq \frac{n}{2}$.

5. $A=0$

$A \neq 0$ in $A^2 = 0$ $\Rightarrow$ A ima lastne vrednosti 0

A nima diagonalizacije (diagonalizacija bi bila 0)

Jordan

Schur

A je podobna $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

✓

A je podobna $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
za nek $a \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x=a$ $\downarrow x=a$

✓ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

A je podobna $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$6. \quad A^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{im}(A) \subseteq \ker(A) \quad \left(\begin{array}{l} \text{Sphösnge} \\ \text{skolaj} \end{array} \quad A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \text{im}(B) \subseteq \ker(A) \right)$$

$\Rightarrow$

$$x \in \text{im}(A) \leadsto \exists y \quad x = Ay \leadsto Ax = A^2 y = 0y = 0$$

$\Leftarrow$

$$\forall x: A^2 x = 0 \quad y = Ax \quad y \in \text{im}(A) \subseteq \ker(A) \leadsto 0 = Ay = A^2 x \leadsto A^2 = 0$$

$$1 \leq \text{rang } A \leq \frac{n}{2}$$

①

Jordanu form A je

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \boxed{1} & & & & \\ & \boxed{1} & & & \\ & & \boxed{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{array} \right] \rightarrow \text{rang}(A) \begin{array}{l} \parallel \\ \text{ist} \text{ } \text{Hekt} \\ \text{dimension} 2 \\ \wedge \\ \frac{n}{2} \end{array}$$

②

$$\text{rang } A + \dim \ker A = n$$

+

$$\text{im}(A) \subseteq \ker(A) \Rightarrow \text{rang}(A) \leq \dim \ker(A)$$

$\downarrow$

$$n \geq \text{rang}(A) + \text{rang}(A) \rightarrow \frac{n}{2} \geq \text{rang}(A)$$