

Integracija iracionalnih funkcij

Uros KUZMAN

Spoznali bomo nekaj trikov, s katerimi se lotimo integracije funkcij, ki vsebujejo korene.

Trik (1)

Če v integralu nastopajo ${}^{p_1}\sqrt{x}, \dots, {}^{p_m}\sqrt{x}$ za spremenljivko vzamemo $t = \sqrt[p]{x}$, kjer je v najmanjši skupni večkratnik števil $p_1, \dots, p_m$.

Trik (2)

Če je integral oblike

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx$$

za neko racionalno funkcijo R , za novo spremenljivko vzamemo

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \iff t^n = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Potem je $x = Q(t^n)$ za neko ulomljeno linearno funkcijo Q .

Primer:

$$I = \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})^3}.$$

Vzamemo $t = \sqrt[12]{x}$. Potem je

$$dt = \frac{1}{12}x^{-\frac{11}{12}}dx = \frac{1}{12}t^{-11}dx \implies dx = 12t^{11}dt.$$

Po drugi strani imamo tudi

$$\sqrt[3]{x} = t^4 \quad \text{in} \quad \sqrt[4]{x} = t^3.$$

Imamo torej

$$I = \int \frac{12t^{11}}{(t^4 - t^3)^3}dt = \int \frac{12t^2}{(t - 1)^3}dt.$$

Domača naloga: Dokončaj integracijo z uvedbo $u = t - 1$.

Primer:

$$I = \int \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$$

Za spremenljivko vzamemo

$$t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \implies t^2 = \frac{x-1}{x+1} \implies x = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

Nadalje imamo

$$dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt.$$

$$x+1 = \frac{1+t^2+1-t^2}{1-t^2} = \frac{2}{1-t^2}.$$

Od tod dobimo

$$I = \int \frac{1-t^2}{2} \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt = \int \frac{2t^2}{1-t^2} dt.$$

Domača naloga: Dokončaj integracijo, tako da polinoma deliš nato pa uporabiš parcialne ulomke.

Odvajajmo funkciji

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad \text{in} \quad g(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

Dobimo

$$f'(x) = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a > 0.$$

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad a \neq 0.$$

Trik (3)

Glede na predznak vodilnega člena lahko integral funkcije $(ax^2 + bx + c)^{-\frac{1}{2}}$ prevedemo na

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0.$$

Trik (4)

Če je p polinom, uporabimo nastavek

$$\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \tilde{p}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \int \frac{C}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

kjer je $C \in \mathbb{R}$ in $\text{st } \tilde{p} = \text{st } p - 1$.

Primer:

$$I = \int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx.$$

Uporabimo nastavek

$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx = A\sqrt{x^2 + 4x} + \int \frac{B}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx.$$

Z odvajanjem dobimo:

$$\frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \frac{(2x + 4)A}{2\sqrt{x^2 + 4x}} + \frac{B}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$$

Torej je

$$A = 1 \quad \text{in} \quad 2A + B = 3.$$

Oziroma

$$I = \sqrt{x^2 + 4x} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \sqrt{x^2 + 4x} + I_1.$$

Obravnavajmo sedaj

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$$

Kvadratno funkcijo pod korenem moramo zapisati v temenski obliki

$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4.$$

Torej lahko uvedemo $t = x + 2$ in dobimo

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 2)^2 - 4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4}} = \ln |t + \sqrt{t^2 - 4}| + C.$$

Končni rezultat je

$$I = \sqrt{x^2 + 4x} + \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x}| + C.$$

Trik (5)

Integrale tipa

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

rešujemo z uvedbo univerzalne substitucije. In sicer:

- $\sqrt{a}(u - x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ za $a > 0$.
- $\sqrt{-a}(x - x_1)u = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ za $a < 0$ (pri tem je x_1 ničla kvadratne funkcije).

Primer

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Uvedemo

$$u - x = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Iz te zveze lahko izrazimo tako u kot x . Res,

$$u = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

$$u^2 - 2ux + x^2 = x^2 + 1 \implies x = \frac{u^2 - 1}{2u}.$$

Nadalje je

$$dx = \frac{u^2 + 1}{2u^2} du,$$

$$x^2 + 1 = \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{4u^2} + 1 = \frac{(u^2 + 1)^2}{4u^2}.$$

Od tod dobimo

$$I = \int \frac{4u^2}{(u^2 + 1)^2} \cdot \frac{2u}{u^2 + 1} \cdot \frac{u^2 + 1}{2u^2} du = 4 \int \frac{u du}{(u^2 + 1)}.$$

Domača naloga: Dokončaj z uvedbo $t = u^2 + 1$.