

Vektorski prostori s skalarnim produktom - 1. del

1. Skalarni produkt

V tem razdelku bomo definirali skalarni produkt na realnih in kompleksnih vektorskih prostorih ter si ogledali nekaj primerov.

Začnimo z realnimi vektorskimi prostori.

Definicija skalarnega produkta nad $\mathbb{R}$

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom realnih števil $\mathbb{R}$. Preslikava, ki vsakemu paru vektorjev $u, v \in V$ priredi realno število $\langle u, v \rangle$ je **skalarni produkt**, če zadošča naslednjim lastnostim:

- 1 Za vsak neničeln $v \in V$ velja $\langle v, v \rangle > 0$.
- 2 Za vsaka $u, v \in V$ velja $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$.
- 3 Za vsake $u_1, u_2, v \in V$ ter $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ velja $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$.

Opomba: Prvi lastnosti pravimo pozitivna definitnost, drugi simetričnost, tretji pa linearnost v prvem faktorju.

Oglejmo si nekaj preprostih posledic aksiomov:

- Za vse $u, v_1, v_2 \in V$ ter vse $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ velja

$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \beta_1 \langle u, v_1 \rangle + \beta_2 \langle u, v_2 \rangle$$

Tej lastnosti pravimo linearnost v drugem faktorju. Dokažemo jo takole: $\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \langle \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, u \rangle = \beta_1 \langle v_1, u \rangle + \beta_2 \langle v_2, u \rangle = \beta_1 \langle u, v_1 \rangle + \beta_2 \langle u, v_2 \rangle$ kjer smo pri prvem in tretjem enačaju uporabili simetričnost, pri drugem enačaju pa linearnost v prvem faktorju.

- Za vsak $v \in V$ velja

$$\langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0.$$

Če v linearnosti v prvem faktorju vstavimo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, dobimo $\langle 0, v \rangle = \langle 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2, v \rangle = 0 \langle u_1, v \rangle + 0 \langle u_2, v \rangle = 0$. Iz simetričnosti sledi $\langle v, 0 \rangle = 0$.

- Za vsak $v \in V$ velja $\langle v, v \rangle \geq 0$. Enačaj velja natanko tedaj, ko je $v = 0$. To sledi iz pozitivne definitnosti in iz $\langle 0, 0 \rangle = 0$.

Oglejmo si primere skalarnih produktov na realnih vektorskih prostorih.

Primer: Standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$

Običajnemu skalarnemu produktu iz prvega semestra bomo tu pravili **standardni skalarni produkt** na $\mathbb{R}^n$. Definiran je z

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

Pokazali smo že, da zadošča lastnostim (1),(2),(3).

Seveda standardni skalarni produkt ni edini skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. Klasifikacijo vseh skalarnih produktov na $\mathbb{R}^n$ bomo obdelali v naslednjem poglavju. Tu pokažimo samo, da jih je neskončno.

Dodatni primeri skalarnih produktov na $\mathbb{R}^n$

Za vsako n -terico $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ strogo pozitivnih realnih števil je s

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \delta_1\alpha_1\beta_1 + \dots + \delta_n\alpha_n\beta_n$$

definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. (Preveri lastnosti (1),(2),(3)!)

Na funkcijskih prostorih je skalarni integral običajno definiran z integralom.

Primer: Standardni skalarni produkt na $\mathcal{C}[a, b]$

Za dve zvezni funkciji f, g iz intervala $[a, b]$ v $\mathbb{R}$ definirajmo.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Preverimo lastnosti (1),(2),(3), torej je to skalarni produkt.

Konstruirajmo še neskončno mnogo drugih skalarnih produktov na $\mathcal{C}[a, b]$.

Dodatni primeri skalarnih produktov na $\mathcal{C}[a, b]$

Naj bo $w \in \mathcal{C}[a, b]$ taka funkcija, ki zadošča $w(x) > 0$ za vsak $x \in [a, b]$. S

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x) dx.$$

je definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$. (Preveri lastnosti (1),(2),(3)!)

Razširimo zdaj definicijo na kompleksne vektorske prostore. Spomnimo se, da za $z = a + bi$ (kjer $a, b \in \mathbb{R}$ in $i^2 = -1$) definiramo $\bar{z} = a - bi$.

Definicija skalarnega produkta nad $\mathbb{C}$

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom kompleksnih števil $\mathbb{C}$. Preslikava, ki vsakemu paru vektorjev $u, v \in V$ priredi kompleksno število $\langle u, v \rangle$ je **skalarni produkt**, če zadošča naslednjim lastnostim:

- 1 Za vsak neničeln $v \in V$ velja $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$ in $\langle v, v \rangle > 0$.
- 2 Za vsaka $u, v \in V$ velja $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$.
- 3 Za vsake $u_1, u_2, v \in V$ ter $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ velja $\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle$.

Opomba: Lastnosti (2) pravimo konjugirana simetričnost. Lastnosti (1) in (3) sta enaki kot v realnem primeru.

Opomba: Pomembna razlika z realnim primerom je, da tu nimamo linearnosti v drugem faktorju ampak konjugirano linearnost, se pravi

$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \bar{\beta}_1 \langle u, v_1 \rangle + \bar{\beta}_2 \langle u, v_2 \rangle$$

za vse $u, v_1, v_2 \in V$ ter vse $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$. To sledi iz $\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \rangle = \overline{\langle \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, u \rangle} = \overline{\beta_1 \langle v_1, u \rangle + \beta_2 \langle v_2, u \rangle} = \bar{\beta}_1 \overline{\langle v_1, u \rangle} + \bar{\beta}_2 \overline{\langle v_2, u \rangle} = \bar{\beta}_1 \langle u, v_1 \rangle + \bar{\beta}_2 \langle u, v_2 \rangle$. Pri prvem in četrtem enačaju smo upoštevali konjugirano simetričnost, pri drugem enačaju linearnost v prvem faktorju. Pri tretjem enačaju smo upoštevali $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ in $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Opomba: Tudi tu velja $\langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$ za vsak $v \in V$.

Opomba: Tudi tu velja $\langle v, v \rangle \geq 0$ za vsak $v \in V$. Enačaj velja natanko tedaj, ko je $v = 0$.

Primer: Standardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$.

Za dve kompleksni n -terici definirajmo njun **standardni skalarni produkt**

$$\langle (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \rangle = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n.$$

Pozor, za razliko od realnega primera imamo tu $\bar{\beta}_i$ namesto β_i .

Opomba: Če $\sum_i \alpha_i \bar{\beta}_i$ zamenjamo z $\sum_i \delta_i \alpha_i \bar{\beta}_i$, kjer so $\delta_i > 0$ fiksni, dobimo drug skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$.

Standardni skalarni produkt na $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$

Za dve zvezni funkciji f, g iz intervala $[a, b]$ v $\mathbb{C}$ definirajmo.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Pozor, za razliko od realnega primera imamo tu $\overline{g(x)}$ namesto $g(x)$.

Opomba: Če vzamemo $\int_a^b w(x) f(x) \overline{g(x)} dx$, kjer je $w(x)$ zvezna in za vsak x realna in strogo pozitivna, potem dobimo drug skalarni produkt.

2. Norma porojena iz skalarne produkta

Definicija norme je podobna kot v prvem semestru.

Definicija norme

Naj bo V realen ali kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom. Za vsak element $v \in V$ definirajmo njegovo **normo** z

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Dokažimo najprej pomožno trditev.

Trditev (Cauchy-Schwartzova neenakost)

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Za vsaka $u, v \in V$ je

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

V dokazu bomo večkrat potrebovali, da je $z\bar{z} = |z|^2$ za vsak $z \in \mathbb{C}$.

Dokaz: Naj bo $\alpha = \langle v, v \rangle$, $\beta = \langle u, v \rangle$ in $w = \alpha u - \beta v$. Potem velja

$$0 \leq \langle w, w \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle u, u \rangle - \alpha \bar{\beta} \langle u, v \rangle - \beta \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + \beta \bar{\beta} \langle v, v \rangle.$$

Opazimo, da je

$$\alpha \bar{\beta} \langle u, v \rangle = \beta \bar{\alpha} \langle v, u \rangle = \beta \bar{\beta} \langle v, v \rangle = |\langle u, v \rangle|^2 \langle v, v \rangle = |\langle u, v \rangle|^2 \|v\|^2$$

in

$$\alpha \bar{\alpha} \langle u, u \rangle = |\langle v, v \rangle|^2 \langle u, u \rangle = \|v\|^4 \|u\|^2.$$

Torej je

$$0 \leq \langle w, w \rangle = \|v\|^4 \|u\|^2 - |\langle u, v \rangle|^2 \|v\|^2.$$

Če je $v \neq 0$, lahko krajšamo $\|v\|^2$ in dobimo

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|u\|^2.$$

S korenjenjem potem dobimo Cauchy-Schwartzovo neenakost. Če je $v = 0$, potem Cauchy-Schwartzova neenakost očitno drži. □

Trditev (Osnovne lastnosti norme)

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Pripadajoča norma zadošča naslednjim lastnostim:

- 1 Za vsak neničeln $v \in V$ je $\|v\| > 0$.
- 2 Za vsak $v \in V$ in vsak skalar α je $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
- 3 Za vsaka $u, v \in V$ je $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Dokaz: Lastnost (1) sledi iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta.

Lastnost (2) sledi iz $\|\alpha v\|^2 = \langle \alpha v, \alpha v \rangle = \alpha \bar{\alpha} \langle v, v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2$, kjer smo upoštevali linearnost v prvem in konjugirano linearnost v drugem faktorju.

Lastnost (3) sledi iz $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) + \langle v, v \rangle \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$.

Upoštevali smo, da za $z = a + ib$ velja $z + \bar{z} = 2a \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} = 2|z|$.

Uporabili smo tudi Cauchy-Schwartzovo neenakost. □

Vemo, kako se norma izraža s skalarnim produktom. Ali znamo tudi skalarni produkt izraziti z normo? Odgovor nam daje:

Trditev (Polarizacijske identitete)

- ❶ Če je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, potem za vsaka $u, v \in V$ velja

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

- ❷ Če je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, potem za vsaka $u, v \in V$ velja

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|u + i^k v\|^2$$

Dokaz: V realnem primeru velja

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \|u + (-1)^k v\|^2 &= \sum_{k=0}^1 (-1)^k \langle u + (-1)^k v, u + (-1)^k v \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^1 \left((-1)^k \langle u, u \rangle + (-1)^{2k} \langle v, u \rangle + (-1)^{2k} \langle u, v \rangle + (-1)^{3k} \langle v, v \rangle \right) = \\ &= \left(\sum_{k=0}^1 (-1)^k \right) \langle u, u \rangle + \left(\sum_{k=0}^1 (-1)^{2k} \right) \langle v, u \rangle + \left(\sum_{k=0}^1 (-1)^{2k} \right) \langle u, v \rangle + \\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^1 (-1)^{3k} \right) \langle v, v \rangle = 2 \langle v, u \rangle + 2 \langle u, v \rangle = 4 \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je

$$\sum_{k=0}^1 (-1)^k = \sum_{k=0}^1 (-1)^{3k} = 0 \quad \text{in} \quad \sum_{k=0}^1 (-1)^{2k} = 2.$$

V kompleksnem primeru velja

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^3 i^k \|u + i^k v\|^2 &= \sum_{k=0}^3 i^k \langle u + i^k v, u + i^k v \rangle = \\&= \sum_{k=0}^3 \left(i^k \langle u, u \rangle + i^{2k} \langle v, u \rangle + i^k \bar{i}^k \langle u, v \rangle + i^{2k} \bar{i}^k \langle v, v \rangle \right) = \\&= \left(\sum_{k=0}^3 i^k \right) \langle u, u \rangle + \left(\sum_{k=0}^3 i^{2k} \right) \langle v, u \rangle + \left(\sum_{k=0}^3 i^k \bar{i}^k \right) \langle u, v \rangle + \\&\quad + \left(\sum_{k=0}^3 i^{2k} \bar{i}^k \right) \langle v, v \rangle = 4 \langle u, v \rangle,\end{aligned}$$

pri čemer smo upoštevali, da je

$$\sum_{k=0}^3 i^k = \sum_{k=0}^3 i^{2k} = \sum_{k=0}^3 i^{2k} \bar{i}^k = 0 \quad \text{in} \quad \sum_{k=0}^3 i^k \bar{i}^k = 4.$$

3. Ortogonalne baze

Kot med dvema vektorjema iz $\mathbb{R}^n$ je pravi natanko tedaj, ko je njun standardni skalarni produkt enak nič. Za splošne skalarne produkte nimamo več geometrijske intuicije, zato pravokotnost definiramo s pomočjo skalarnega produkta.

Definicija ortogonalnosti vektorjev

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Vektorja $u, v \in V$ sta **pravokotna** (s tujko ortogonalna), če velja $\langle u, v \rangle = 0$.

Opomba: Ničelni vektor je pravokoten na vse vektorje, zato ni zanimiv.

Opomba: Neničeln vektor ne more biti pravokoten sam nase.

Primer

Vektorja $(1, 2)$ in $(2, -3)$ iz $\mathbb{R}^2$ sta pravokotna glede na skalarni produkt

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = 3\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2,$$

nista pa pravokotna glede na standardni skalarni produkt.

Definicija ortogonalne množice

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Množica vektorjev iz V je **ortogonalna**, če ne vsebuje ničelnega vektorja in če sta vsaka dva različna vektorja iz te množice pravokotna.

Primer

Vektorji $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1)$ in $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$ tvorijo ortogonalno množico v $\mathbb{R}^8$ za standardni skalarni produkt.

Primer

Funkcije $f_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{a}$, kjer $k = 1, 2, 3, \dots$, tvorijo neskončno ortogonalno množico v $\mathcal{C}[0, a]$ za standardni skalarni produkt.

Dokaz: Velja $\langle f_k(x), f_l(x) \rangle = \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi x}{a} dx =$
 $\frac{1}{2} \int_0^a \cos \frac{(k-l)\pi x}{a} dx - \frac{1}{2} \int_0^a \cos \frac{(k+l)\pi x}{a} dx = 0$, če $k \neq l$.

Trditev

Vsaka ortogonalna množica je linearno neodvisna.

Dokaz: Recimo, da so $v_1, \dots, v_k$ neničelni paroma pravokotni vektorji iz V . Če je $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ za neke skalarje $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, moramo pokazati, da velja $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$. Opazimo, da za vsak i velja $0 = \langle 0, v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_i \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle + \dots + \alpha_k \langle v_k, v_i \rangle$. Ker je $\langle v_1, v_i \rangle = \dots = \langle v_{i-1}, v_i \rangle = \langle v_{i+1}, v_i \rangle = \dots = \langle v_k, v_i \rangle = 0$, je $0 = \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$. Ker je $v_i \neq 0$ za vsak i , odtod sledi $\alpha_i = 0$ za vsak i . $\square$

Definicija ortogonalne baze

Ortogonalna množica v V , ki je ogrodje za V , je **ortogonalna baza** za V .

Primer

Standardna baza v $\mathbb{R}^n$ je ortogonalna baza glede na standardni skalarni produkt.

Definicija ortonormirane baze

Vektorjem z normo 1 pravimo **normirani** vektorji. Ortogonalni množici, v kateri so vsi elementi normirani, pravimo **ortonormirana množica**. Ortonormirani množici, ki je baza, pravimo **ortonormirana baza**.

Opomba: Definicijo ortonormiranosti množice $\{v_1, \dots, v_n\}$ se običajno na kratko pove z naslednjo formulo

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{če } i \neq j \\ 1 & \text{če } i = j \end{cases}$$

Opomba: Vsak neničeln vektor lahko spremenimo v normiran vektor tako, da ga delimo z njegovo normo. Pravimo, da smo element normirali. Vsako ortogonalno množico lahko spremenimo v ortonormirano množico tako, da vse njene elemente normiramo.

Primer normiranja ortogonalne baze

Vektorji $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$, $(1, -\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 1, -\frac{1}{2})$ tvorijo ortogonalno bazo za $\mathbb{R}^3$, ki ni normirana. Če te vektorje normiramo (delimo s $\frac{3}{2}$), dobimo vektorje $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, ki tvorijo ortonormirano bazo za $\mathbb{R}^3$.