

Krivulje in ploskve

Krivulje

Risanje krivulj v ravnini

Vektorska funkcija oziroma parametrično podana krivulja je funkcija $\vec{r}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$, kjer je $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ nek interval. Predstavljamo si lahko, da opisuje gibanje točke po ravnini. Parameter $t \in [\alpha, \beta]$ si predstavljamo kot čas, vrednost $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ pa kot položaj točke ob času t . Pomemben je tudi vektor $\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, ki ga interpretiramo kot hitrost točke. Pri skiciranju tira vektorske funkcije si pomagamo z naslednjimi podatki:

- skiciramo grafa in poiščemo stacionarne točke obeh komponent,
- označimo položaje, ki ustrezajo stacionarnim točkam,
- analiziramo limitno in asimptotično obnašanje obeh komponent.

Naloge

1. Nariši krivuljo, ki je podana s parametrizacijo

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin(2t) \\ y(t) &= \cos(t).\end{aligned}$$

Enačbo krivulje zapiši tudi v implicitni obliki.

2. Nariši krivuljo, ki je podana s parametrizacijo

$$\begin{aligned}x(t) &= 4 \cos t \\ y(t) &= 3 \sin t.\end{aligned}$$

Enačbo krivulje zapiši tudi v implicitni obliki.

3. Nariši Descartesov list, t.j. krivuljo, ki je podana v implicitni obliki z enačbo

$$x^3 - 3xy + y^3 = 0.$$

Nasvet: uvedi parameter $t = \frac{y}{x}$.

Dolžina krivulje in naravna parametrizacija

Dolžina krivulje s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, je enaka

$$\int_a^b \left| \dot{\vec{r}}(t) \right| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt.$$

Naravni parameter krivulje s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ in začetno točko $\vec{r}(t_0)$ je enak

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left| \dot{\vec{r}}(u) \right| du.$$

Naloge

4. Dana je krivulja $\vec{r}(t) = (3t^2 - 1, t(3 - t^2))$. (Tschirnhauserjeva krivulja)

a) Skiciraj krivuljo.

b) Izrazi naravni parameter krivulje z začetnim za $t \in [0, \infty)$.

c) Izračunaj dolžino krivulje med točkama $(-1, 0)$ in $(8, 0)$.

5. Parametriziraj daljico od točke $A(-1, 2, 0)$ do točke $B(-7, 2, 8)$ z naravnim parametrom.

6. Izračunaj dolžino polovice loka cikloide z radijem 1, t.j. $x(\varphi) = \varphi - \sin \varphi$ in $y(\varphi) = 1 - \cos \varphi$ za $\varphi \in [0, \pi]$.

Tangenta in normalna ravnina

Enačba **tangente** na krivuljo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$ je

$$\vec{T}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda \dot{\vec{r}}(t_0)$$

Normalna ravnina na krivuljo: ravnina, ki vsebuje točko $\vec{r}(t_0)$ z normalo $\dot{\vec{r}}(t_0)$.

Naloge

7. Izračunaj enačbo tangente in normalne ravnine na

a) krivuljo s parametrizacijo $\vec{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}, -t^3\right)$ v točki $\left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$,

b) krivuljo s parametrizacijo $\vec{r}(t) = \left(e^t, \frac{1}{1+t}, \sin t\right)$ v točki $(1, 1, 0)$.

8. Parametriziraj krivuljo $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ in zapiši enačbo tangente pri $x = 1$, $y < 0$, $z > 0$.

Ukrivljenost krivulj

Spremljajoči trieder krivulje s parametrizacijo $\vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$ sestavljajo:

tangentni vektor $\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}(t_0)}{\|\dot{\vec{r}}(t_0)\|} = \vec{r}'(s_0)$

vektor glavne normale $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{\vec{r}''(s_0)}{\|\vec{r}''(s_0)\|} = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t_0)\|^2 \ddot{\vec{r}}(t_0) - (\dot{\vec{r}}(t_0) \cdot \ddot{\vec{r}}(t_0)) \dot{\vec{r}}(t_0)}{\|\|\dot{\vec{r}}(t_0)\|^2 \ddot{\vec{r}}(t_0) - (\dot{\vec{r}}(t_0) \cdot \ddot{\vec{r}}(t_0)) \dot{\vec{r}}(t_0)\|}$

vektor binormale $\vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)}{\|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\|}$

Pritisnjena ravnina $(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{B} = 0$.

Normalna ravnina $(\vec{R} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{T} = 0$.

Upognjenost / fleksijska ukrivljenost

$$\kappa = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t_0)\|^3} = \|\vec{r}''(s_0)\|$$

Polmer pritisnjene krožnice

Zvitost / torzijska ukrivljenost

$$\omega = \frac{\left(\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0) \right) \cdot \dddot{\vec{r}}(t_0)}{\left\| \dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0) \right\|^2} = \|\vec{B}'(s_0)\|$$

Frenetove formule (v naravni parametrizaciji)

$$\vec{T}' = \kappa \vec{N}$$

$$\vec{B}' = -\omega \vec{N}$$

$$\vec{N}' = \omega \vec{B} - \kappa \vec{T}$$

če je $w = 0$ za vsak t , je krivulja ravninska

9. Izračunaj ukrivljenost eksplicitno podane krivulje $y = x^4 - x + 1$ v točki $x = 1$.

Naloge

10. Naj bo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a, b > 0$)

- Parametriziraj krivuljo.
- Izračunaj ukrivljenost v poljubni točki.
- Določi polmera pritisnjenih krogov v točkah $A(a, 0)$ in $B(0, b)$.

11. Krivulja K je določena kot presek ploskev z enačbama $x^2 = 3y$ in $2xy = 9z$.

- Določi naravni parameter za krivuljo K in dolžino odseka krivulje K med točkama $(0, 0, 0)$ in $(3, 3, 2)$.
- Izračunaj upognjenost (fleksijsko ukrivljenost) in zvitost (torzijsko ukrivljenost) krivulje K v točki $(0, 0, 0)$.
- Določi enačbo tangentne premice in normalne ravnine v točki $(3, 3, 2)$.

12. En zavoj vijačnice parametriziraj z naravnim parametrom in izračunaj njegovo dolžino. Parametrizacija enega zavoja vijačnice je $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$, $z(t) = ht$ za $t \in [0, 2\pi]$, kjer sta a in h pozitivni števili.

13. Dana je krivulja $\vec{r}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$.

- Parametriziraj po naravnem parametru.
- Izračunaj spremljajoči trieder.
- Izračunaj fleksijsko in torzijsko ukrivljenost v točki $(0, 3, 2\pi)$.

14. Podana je krivulja kot $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$.

- Parametriziraj krivuljo.

b) Določi normalno in pritisnjeno ravnino v točki $(1, 1, \sqrt{2})$.

15. Naj bo $\vec{r}(t) = (1 + 3t + 3t^2, 2 - 2t + 5t^2, 1 - t^2)$

a) Pokaži, da je krivulja ravninska.

b) Določi ravnino, v kateri leži krivulja.

16. Naj bo $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.

a) Določi naravni parameter.

b) Izračunaj spremljajoči trieder.

c) Izračunaj fleksijsko in torzijsko ukrivljenost krivulje v točki $(1, 0, 1)$.

d) Določi enačbo pritisnjene in normalne ravnine v točki $(1, 0, 1)$.

17. Naj bo $a > 0$ in $\mathcal{K} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = a^2, z = 0\}$ krožnica.

a) Parametriziraj krivuljo $\mathcal{K}$ z naravnim parametrom.

b) Izračunaj upognjenost (fleksijsko ukrivljenost) in zvitost (torzijsko ukrivljenost) krivulje $\mathcal{K}$.

18. Naj bo $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

a) Izračunaj fleksijsko in torzijsko ukrivljenost v točkah $(0, 0, 0)$ in $(-1, 1, -1)$.

b) Izračunaj pritisnjeno in normalno ravnino v točki $(-1, 1, -1)$.

19. Krivulja $\mathcal{K}$ je dana s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = \left(\sin t, \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \cos t \right)$$

a) Krivuljo $\mathcal{K}$ parametriziraj z naravnim parametrom.

b) Določi spremljajoči trirob, upognjenost (fleksijsko ukrivljenost), zvitost (torzijsko ukrivljenost) in enačbo pritisnjene ravnine krivulje $\mathcal{K}$ v točki $(0, 1, 1)$.

20. Dokaži, da je krivulja s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (2t + 1, 3t^2 - 1, t^2 + t + 1).$$

ravninska in določi enačbo ravnine, v kateri leži.

Ploskve

Podajanje ploskev

EksPLICITNA oblika: ploskev je zapisana kot graf funkcije:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathbb{D}\}$$

IMPLICITNA oblika: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gladka funkcija. Ploskev:

$$\mathbb{M} = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$$

PARAMETRIČNA oblika: $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta množica in $r : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikava, $r \in \mathbb{C}^1$.
Ploskev:

$$r(u, v) = (r_1(u, v), r_2(u, v), r_3(u, v))$$

Parametrizacija je regularna, če vektorja r_u in r_v nista vzporedna ($r_u \times r_v \neq 0$)

21. Parametrizirajte ploskev $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Naloge

22. Naj bo S ploskev, podana z enačbo $z = x^2 + 2y^2$.

- a) Zapiši enačbo normalne premice in tangentne ravnine na ploskev S v točki $(1, 2, 9)$.
- b) Kaj so koordinatne krivulje pri zgornji parametrizaciji?
- c) Pod kakšnim kotom se sekata koordinatni krivulji v točkah $(\sqrt{2}, 0, 2)$ in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})$?

23. Dana je parametrično zapisana ploskev $\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, \sqrt{1 - u^2})$.

- a) Zapišite jo v eksplisnitni obliki.
- b) Katera ploskev je to?
- c) Pokažite, da so koordinatne krivulje pravokotne povsod, kjer ima to smisel.
- d) Pokažite, da je

$$\begin{aligned}x &= \cos^2 t \cos w - \sin t \cos t \sin w \\y &= \cos^2 t \sin w + \sin t \cos t \cos w \\z &= \sin t\end{aligned}$$

zapis ploskve, ki vsebuje prejšnjo ploskev. Zapišite novo ploskev v implicitni obliki.
Katera ploskev je to?

- e) Izračunajte kot med koordinatnima krivuljama glede na novo parametrizacijo v točki $(1/2, \sqrt{3}/2, 0)$.
- f) Dokažite, da koordinatne krivulje glede na novo parametrizacijo niso pravokotne nikjer, kjer ima to smisel.

24. Dana je ploskev $\vec{r} = (u \cos v, u^2 \sin v, u^3 - u)$.

- a) Določite, kje so koordinatne krivulje pravokotne.

b) Pri $u = \sqrt{3}$ in $v = \frac{\pi}{3}$ določite točko in tangentno ravnino.

25. Pod kakšnim kotom se sekata valj $x^2 + y^2 = R^2$ in krogla $(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ v točki $(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0)$?

26. Dana je ploskev $x + 2y + z^2 = 1$.

a) Dokaži, da so vse njene tangentne ravnine vzporedne z neko premico. Poišči to premico.

b) Ali lahko v okolici točke $T(-1, 1, 0)$ izrazimo z kot funkcijo spremenljivk x in y ?

c) Poišči tangentno ravnino na ploskev v točki T .

27. Določite normalni vektor in normalo na ploskev $z = x^2 + \frac{18}{y}$ v točki $T(1, 3, z)$.

28. Na enotski sferi $\vec{r} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$ izračunajte dolžino poti, določene s $\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}$ in $\theta = \arccos t$ za $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

29. Izračunajte površino tistega dela ploskve $x^2 + y^2 + z = 1$, ki leži nad ravnino xy .

30. Izračunajte površino naslednjega dela helikoida:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = \varphi, \quad 0 < \varphi < \rho < 2\pi$$

31. Dana je ploskev $\vec{r} = (u \cos v, u \sin v, v)$.

a) Izračunaj glavni ukrivljenosti in glavni smeri v točki $\vec{r}(1, \frac{\pi}{2})$.

b) Izračunaj Gaussovo in povprečno ukrivljenost v točki $\vec{r}(1, \frac{\pi}{2})$.

32. Dana je ploskev $\vec{r} = (u^2 + v, u + v^2, uv)$

a) Dokažite, da na njej obstaja natanko ena točka, ki ima koordinati $y = -2$ in $z = 0$. Izračunajte še x koordinato te točke.

b) Izračunajte Gaussovo in povprečno ukrivljenost ploskve v tej točki. Klasificirajte točko.

33. Dana je ploskev $4z = 7x^2 - 6xy\sqrt{3} + 13y^2$.

a) Izračunaj glavni ukrivljenosti in smeri v točki $(0, 0, 0)$ in in v točki $(1, 2, 4)$.

b) Izračunaj ukrivljenost normalnega preseka v točki $(0, 0, 0)$ v smeri tangentnega vektorja $(2, 3, 0)$.

c) Izračunaj ukrivljenost preseka z ravnino $x = z$ v točki $(0, 0, 0)$.

34. Dana je ploskev

$$\vec{r}(u, v) = \begin{bmatrix} -2 \sin u - 10 \cos u - 2 \sin v - 19 \cos v + 14 \sin u \sin v \\ 4 \sin u + 20 \cos u + 7 \sin v + 38 \cos v - 28 \sin u \sin v \\ 5 \sin u - 20 \cos u + 8 \sin v - 38 \cos v + 28 \sin u \sin v \end{bmatrix}$$

Naj bo T_0 točka pri $u = v = 0$.

a) Določi točko T_0 in tangentno ravnino skozi to točko.

- b) Določite t tako, da bo vektor $\vec{w} = (-4, 5, t)$ tangenten na ploskev v točki T_0 . Nato izrazite $\vec{w}$ z $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$.
- c) V T_0 izračunajte ukrivljenost normalnega preseka v smeri tangentnega vektorja $\vec{w}$.
- d) Izračunajte glavni ukrivljenosti v T_0 in klasificirajte to točko.
- e) Izračunajte Gaussovo in povprečno ukrivljenost v T_0 .

35. Kakšne kote oklepa normala na ploskev $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$ v točki $(0, 2, z_0)$ s koordinatnimi osmi.

36. Dana je ploskev $xy + x + y - z + 1 = 0$. Pokaži, da točke na ploskvi, v katerih tangentna ravnina poteka skozi koordinatno izhodišče, ležijo na ravnini $x + y - z + 2 = 0$.

37. Dana je ploskev $r(u, v) = (\cos u, \sin u, u + v)$.

- a) Kaj so koordinatne krivulje?
- b) Izračunaj 1. fundamentalno formo ploskve.
- c) Izračunaj dolžino krivulj
- $v = 0, u \in [0, 2\pi]$
 - $u = v \in [0, 2\pi]$
- d) Pod kakšnim kotom se sekajo koordinatne krivulje?

38. Dana je ploskev $r(u, v) = (u, v, 2uv)$.

- a) Izračunaj glavni ukrivljenosti v točki $(1, 2, 4)$.
- b) Izračunaj Gaussovo in povprečno ukrivljenost.
- c) Izračunaj glavni smeri.

Rešitve

1 Elipsa z enačbo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

2 Elipsa z enačbo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3 Parametrizacija je

$$x(t) = \frac{3t}{t^3 + 1}$$
$$y(t) = \frac{3t^2}{t^3 + 1}.$$

Asimptota ima enačbo $y = -x - 1$. Komponenta x v odvisnosti od t raste na intervalih $(-\infty, -1)$ in $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$, pada pa na intervalu $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty)$. Komponenta y v odvisnosti od t raste na intervalu $(0, \sqrt[3]{2})$, pada pa na intervalih $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ in $(\sqrt[3]{2}, \infty)$.

4 a) TODO b) $-2/3$ c) $6\sqrt{3}$

5 $\vec{r}(s) = (-1 - \frac{3s}{5}, 2, \frac{4s}{5})$, $s \in [0, 10]$

6 4

7 a) $\vec{R}(\lambda) = (1, \frac{1}{2}, -1) + \lambda(1, 1, -3)$ oz. $x - 1 = y - \frac{1}{2} = -\frac{z+1}{3}$; $x + y - 3z = \frac{9}{2}$

b) $\vec{R}(\lambda) = (1, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1)$ oz. $x - 1 = 1 - y = z$; $x - y + z = 0$

9 $\frac{3\sqrt{10}}{25}$

10 a) $x(t) = a \cdot \cos(t)$, $y(t) = b \cdot \sin(t)$ b) $\frac{1}{\rho} = \frac{ab}{(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^{3/2}}$ c) v A : $\rho = \frac{a^2}{b}$, v B : $\rho = \frac{b^2}{a}$

11 a) Naravni parameter: $s(x) = x + 2x^3/27$. Dolžina odseka krivulje je 5. b) $\kappa = \omega = \frac{2}{3}$
c) tangentna premica: $(x, y, z) = (3, 3, 2) + \lambda(1, 2, 2)$,
normalna ravnina: $x + 2y + 2z = 13$

12 Dolžina je $2\pi\sqrt{a^2 + h^2}$, naravna parametrizacija pa

$$\vec{r}(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} s \right), \quad s \in [0, 2\pi\sqrt{a^2 + h^2}].$$

13 a) $\vec{r}(t) = (3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, \frac{4s}{5})$ b) $T(s) = (-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5})$, $N(s) = (-\cos \frac{s}{5}, -\sin \frac{s}{5}, 0)$,
 $B(s) = (\frac{4}{5} \sin \frac{s}{5}, -\frac{4}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{3}{5})$ c) $\kappa(\frac{5\pi}{2}) = \frac{3}{25}$, $\omega(\frac{5\pi}{2}) = \frac{4}{25}$

14 a) $\vec{r}(t) = (\cos t + 1, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$ b) normalna ravnina: $-x + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$
pritisnjena ravnina: $\frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) - \frac{\sqrt{2}}{4}(y - 1) + z - \sqrt{2} = 0$

15 a) pokažemo, da je torzijska ukrivljenost enaka 0 v poljubni točki. b) $2x + 3y + 21z = 29$

16 a) $r(s) = \frac{s}{\sqrt{3}}(\cos(\ln \frac{s}{\sqrt{3}}) - \sin(\ln \frac{s}{\sqrt{3}}), \sin(\ln \frac{s}{\sqrt{3}}) + \cos(\ln \frac{s}{\sqrt{3}}), 1)$ b) $T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)$
 $N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t - \cos t, \cos t - \sin t, 0)$

$B(s) = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t, -\sin t - \cos t, 2)$ c) $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\omega = \frac{1}{3}$ d) pritisnjena ravnina: $-x - y + 2z = 1$, normalna ravnina: $x + y + z = 2$

17 a) Naravna parametrizacija je $\vec{r}(s) = \left(\cos \frac{s}{a}, \sin \frac{s}{a}, 0\right)$. b) $\kappa = \frac{1}{a}$, $\omega = 0$

18 a) $(0, 0, 0)$: $2, \frac{3}{2}; (-1, 1, -1)$: $\sqrt{\frac{38}{7}}, \frac{12}{76^{3/2}}$ b) $3x + 3y + z - 1 = 0, x - 2y + 3z + 6 = 0$

19 a) Naravna parametrizacija je $\vec{r}(s) = \left(\sin(\ln(s + \sqrt{s^2 + 1})), \frac{s + \sqrt{s^2 + 1} + \frac{1}{s + \sqrt{s^2 + 1}}}{2}, \cos(\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}))\right)$

b) $\vec{T} = (1, 0, 0)$, $\vec{N} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{B} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\kappa = \sqrt{2}$, $\omega = 0$, $y + z = 2$

20 $\omega = 0$; Krivulja leži v ravnini $3x + 2y - 6z = -5$

22 a) $(1, 2, 9) + \lambda(-2, -8, 1)$, $2x + 8y - z = 9$ b) obe sta paraboli c) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$

23 a) TODO

24 a) TODO

25 $\frac{\pi}{3}$

26 a) premica s smernim vektorjem $(2, -1, 0)$ b) Ne (izrek o implicitni funkciji) c) $x + 2y = 1$

27 $\vec{n} = -2/3, 2/3, 1/3$, normala: $-x + 1 = y - 3 = 2z - 14$

28 $\frac{1}{2} \ln 3$

29 $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)$

30 $\frac{1}{3}((4\pi^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1)$

31 a) $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$, glavni smeri: $(-1, -\sqrt{2}, 1)$ in $(-1, \sqrt{2}, 1)$ b) $K = -14$, $H = 0$

32 a) $x = 4$ b) $K = \frac{7}{529}$, $H = -\frac{50}{23\sqrt{69}}$, eliptična (ni krogelna)

33 a) $\lambda_1 = 8$: $(\sqrt{3}, -1, 0)$, $\lambda_2 = 2$: $(\sqrt{3}, 3, 0)$

34 a) $T_0(-29, 58, -58)$, tangentna ravnina: $-x + 2y - 2z = 261$

b) $t = 7$, $\vec{w} = 3\vec{r}_u - \vec{r}_v$

c) $-\frac{5}{6}$

d) -1 in $\frac{2}{3}$, točka je hiperbolična.

e) $-\frac{2}{3}$ in $-\frac{1}{6}$

35 $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, -\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$

36 a) TODO

37 a) $u = C$: navpična premica, $v = D$: vijačnica b) $|\dot{\lambda}|^2 = 2\dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2$ c) $\sqrt{2} \cdot 2\pi$, $\sqrt{5} \cdot 2\pi$ d) $\frac{\pi}{4}$

38 a) $\lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{85}}{21\sqrt{21}}$ b) $K = -\frac{4}{21^2}$, $H = -\frac{16}{21^{3/2}}$ c) $(-85 \pm 8\sqrt{85})r_u + (136 \pm 7\sqrt{85})r_v$

39 a) TODO

40 a) $u = C$: navpična premica, $v = D$: vijačnica b) $|\dot{\lambda}|^2 = 2\dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2$ c) $\sqrt{2} \cdot 2\pi$, $\sqrt{5} \cdot 2\pi$ d) $\frac{\pi}{4}$

41 V T_1 : $\frac{1}{A+a}$ in $\frac{1}{a}$ (eliptična točka), v T_2 : 0 in $\frac{1}{a}$ (parabolična točka), v T_3 : $-\frac{1}{A-a}$ in $\frac{1}{a}$ (hiperbolična točka).

42 a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ in $\frac{\sqrt{6}}{2}$

43 a) $\lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{85}}{21\sqrt{21}}$ b) $K = -\frac{4}{21^2}$, $H = -\frac{16}{21^{3/2}}$ c) $(-85 \pm 8\sqrt{85})r_u + (136 \pm 7\sqrt{85})r_v$

44 a) TODO

39 a) TODO

40 a) $u = C$: navpična premica, $v = D$: vijačnica b) $|\dot{\lambda}|^2 = 2\dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{v} + \dot{v}^2$ c) $\sqrt{2} \cdot 2\pi$, $\sqrt{5} \cdot 2\pi$ d) $\frac{\pi}{4}$

41 V T_1 : $\frac{1}{A+a}$ in $\frac{1}{a}$ (eliptična točka), v T_2 : 0 in $\frac{1}{a}$ (parabolična točka), v T_3 : $-\frac{1}{A-a}$ in $\frac{1}{a}$ (hiperbolična točka).

42 a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ in $\frac{\sqrt{6}}{2}$

43 a) $\lambda_{1,2} = \frac{-16 \pm 2\sqrt{85}}{21\sqrt{21}}$ b) $K = -\frac{4}{21^2}$, $H = -\frac{16}{21^{3/2}}$ c) $(-85 \pm 8\sqrt{85})r_u + (136 \pm 7\sqrt{85})r_v$

44 a) TODO