

- Prevermo, da je

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

res skalarni produkt na

$C[a, b] =$ zveze funkcije iz $[a, b]$ v $\mathbb{R}$

① Pozitivna definitnost.

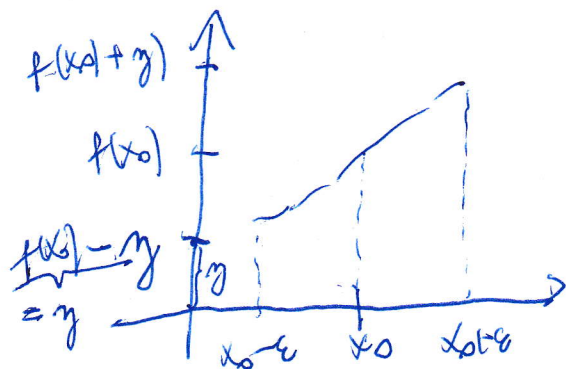
Če je f nenulna funkcija, potem
bi radi dokazali, da je $\langle f, f \rangle > 0$

Če je f nenulna funkcija, potem
obstaja tak $x_0 \in [a, b]$, da je $f(x_0) \neq 0$

Naj bo $\eta = |f(x_0)|/2 \geq 0$.

Po definiciji zveze funkcije, obstaja tak $\varepsilon > 0$,
da za vsako $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ velja $f(x) \in (f(x_0) - \eta, f(x_0) + \eta)$

Odtod sledi, da je $|f(x)| > \eta$ za vsako $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$



Odatd sledi:

$$a < x_0 < b$$

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx > \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)^2 dx > ?$$

Upoštevamo, da je $|f(x)| > y > 0$ za vsak $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$

$$\Rightarrow f(x)^2 > y^2 > 0$$

$$\therefore \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} y^2 dx = 2\varepsilon y^2 > 0$$

$$\textcircled{2} \quad \left. \begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_a^b f(x)g(x) dx \\ \langle g, f \rangle &= \int_a^b g(x)f(x) dx \end{aligned} \right\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{komut.} \\ \text{množenje} \\ \text{realnih števil} \end{array}$$

$$\textcircled{3} \quad \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g \rangle = \int_a^b \underbrace{(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)}_{\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)}(x) g(x) dx$$

$$= \int_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) g(x) dx$$

$$= \int_a^b (\alpha_1 f_1(x) g(x) + \alpha_2 f_2(x) g(x)) dx$$

$$= \int_a^b \alpha_1 f_1(x) g(x) dx + \int_a^b \alpha_2 f_2(x) g(x) dx$$

$$= \alpha_1 \int_a^b f_1(x) g(x) dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x) g(x) dx$$

$$= \alpha_1 \langle f_1, g \rangle + \alpha_2 \langle f_2, g \rangle$$

Kaj je to vreme funkcia iz $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$?

To je funkcia oblike

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)i,$$

ker sta $f_1(x)$ in $f_2(x)$ aventi

funkciji iz $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$= \int_a^b (f_1(x) + if_2(x)) (\overline{g_1(x) + ig_2(x)}) dx$$

$$= \int_a^b (f_1(x) + if_2(x)) (g_1(x) - ig_2(x)) dx$$

$$= \int_a^b (f_1(x)g_1(x) + if_2(x)g_1(x) \\ - f_1(x)ig_2(x) + f_2(x)g_2(x)) dx$$

$$= \int_a^b (f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) \\ + i(f_2(x)g_1(x) - f_1(x)g_2(x))) dx$$

$$= \int_a^b (f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x)) dx \\ + i \int_a^b (f_2(x)g_1(x) - f_1(x)g_2(x)) dx$$

• Ortogonalne množice so LN

$v_1, \dots, v_k$ paroma ortogonalni in nenulni

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \quad (*)$$

Najprej (*) skalarno množimo z v_1

$$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_1 \rangle = 0$$

$$\underbrace{\alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle}_{\neq 0} + \underbrace{\dots + \alpha_k \langle v_k, v_1 \rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Nato (*) skalarno množimo z v_2

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k, v_2 \rangle = 0$$

$$\underbrace{\alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle}_{=0} + \underbrace{\alpha_2 \langle v_2, v_2 \rangle}_{\neq 0} + \underbrace{\dots + \alpha_k \langle v_k, v_2 \rangle}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = 0.$$

Na ta način dokazamo, da je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Dokazali smo, da so

$$v_1, \dots, v_m$$

linearno neodvisni.

Uporaba ortogonalnih in ortonormalnih baz.

Če hočemo nek vektor razviti po neki bazi, potem moramo v splošnem rešiti nek sistem linearnih enačb.

Pri razvoju vektorja po ortogonalni bazi se računanje koeficientov zelo poenostavi.

Recimo, da je $v_1, \dots, v_n$ ortogonalna baza za V . Radi bi razvili $v \in V$ po tej bazi.

Vemo, da razvoj obstaja (po definiciji baze)

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad (**)$$

Radi bi izračunali $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Najprej formulo (**) skalarno množimo z v_1

$$\langle v, v_1 \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_1 \rangle$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{\neq 0} + \alpha_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_1 \rangle}_{=0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle}$$

Podobno izračunamo

$$\alpha_2 = \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} \quad \dots \quad \alpha_n = \frac{\langle v, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle}$$

Formula (**) se torej glasi

$$\boxed{\begin{aligned} N &= \frac{\langle N, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle N, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\langle N, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \end{aligned}}$$

Če je baza $v_1, \dots, v_n$ tudi normirana, ortogonalna $\&$ $\|v_1\|=1, \dots, \|v_n\|=1$, potem se formula za razvoj vektora po bazi še dodatno poenostavi

$$\|v_i\|=1 \Rightarrow \langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1^2 = 1$$

Formula za razvoj vektora po ortonormirani bazi se torej glasi

$$\boxed{N = \sum_{i=1}^n \langle N, v_i \rangle v_i}$$