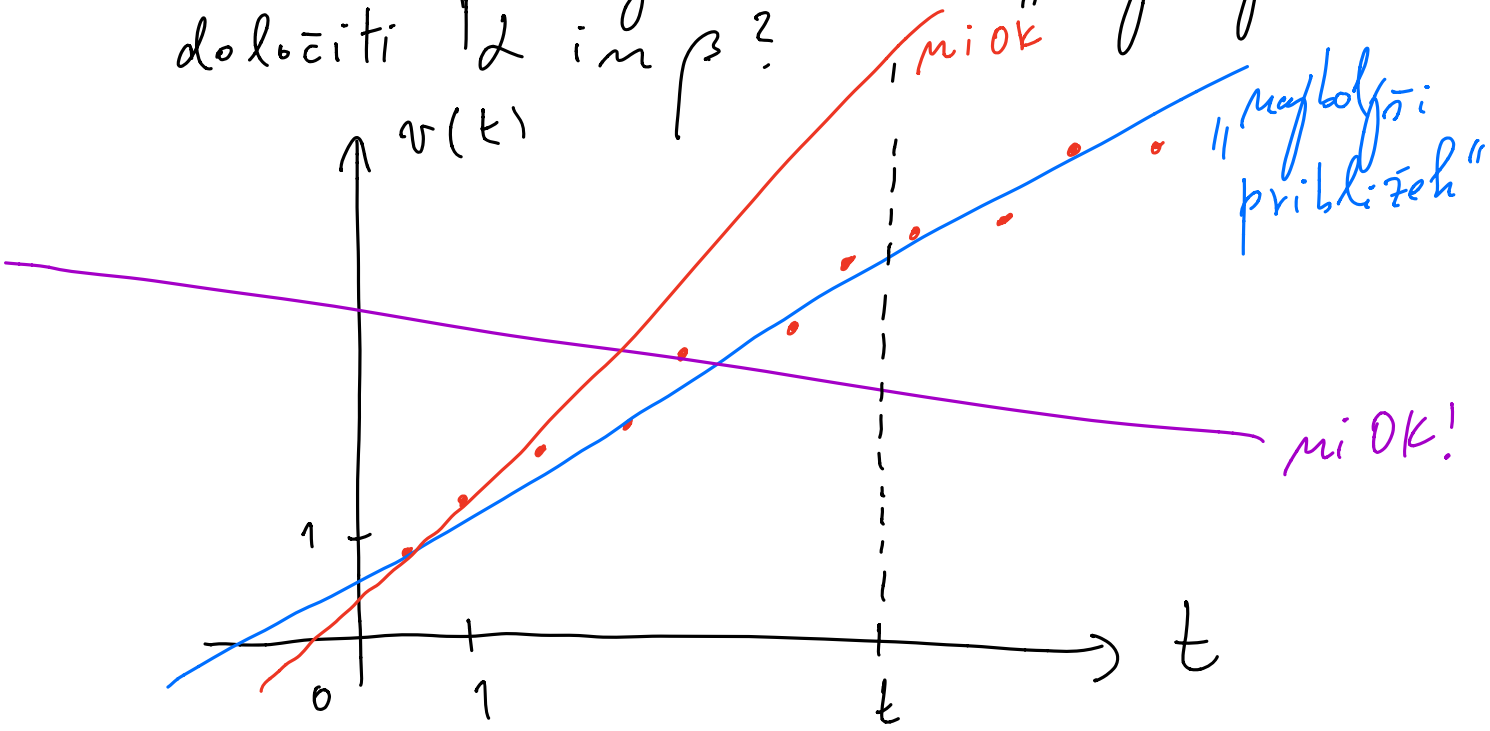
Linearni problem najmanjših kvadratov

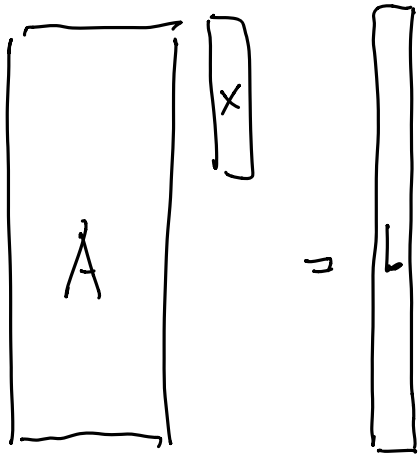
<u>Primer</u>: Hitrost je linearno odvisna od časa, $v(t) = \alpha t + \beta$. Hitrost izmerimo ob več časih t_j, $j = 1, 2, \dots, N$.
Na voljo imamo približke $v_j \approx v(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$.
Kako na podlagi meritev „najbolje" določiti α in β?



Idealno: $\alpha t_i + \beta = v_i$, $i = 1, 2, \dots, N$

$$
\begin{aligned}
t_1 \alpha + 1 \cdot \beta &= v_1 \\
t_2 \alpha + 1 \cdot \beta &= v_2 \\
&\vdots \qquad \Longrightarrow \\
t_N \alpha + 1 \cdot \beta &= v_N
\end{aligned}
$$

$$A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times 2}$$



PREDOLOČEN SISTEM

Ta sistem nima rešitve!

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \| A x - b \|_2$$

<u>Primer</u>: Širjenje okužb COVID-19 marca 2020.

Podatki za obdobje od 4. 3. 2020 do 12. 3. 2020.

t_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t_i)$	1	3	7	12	16	23	31	57	131

Predpostavka je $f(t) = a e^{bt}$; a, b neznanki

Linearizirani model:

$$\log f(t) = \underbrace{\log a}_{\tilde{a}} + \underline{\underline{b}} t$$

$$\underline{\underline{a = e^{\tilde{a}}}}$$

Problem min. kvadratov:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$

iščemo $x \in \mathbb{R}^n$: napaka $\|Ax - b\|_2$ minimalna, torej iščemo

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2 .$$

Vektorju x^*, ki minimizira zgornjo normo, rečemo „rešitev po metodi najmanjših kvadratov!"

Če A ni polnega ranga, torej $\operatorname{rang}(A) < n$, potem rešitev ni enolična!

Če je $\operatorname{rang}(A) < n$ in x^* rešitev po metodi najmanjših kvadratov, je tudi $x^* + z$, $z \in \ker A$, taka rešitev.

$$\left(\operatorname{rang}(A) < n \Rightarrow \dim \ker A \geq 1 \right)$$

$$\| A x^* - b \|_2 = \| A(x^* + z) - b \|_2$$

Privzamemo, da je A polnega ranga.

1. Normalni sistem enačb

Izkaže se, da je rešitev po metodi min. kvad. ravno rešitev sistema

$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

a) $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (LU z delnim pivot, Cholesky, ...)

i) $(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA$ ✓ sim.

ii) A^TA je pozitivno definitna

$x \neq 0$: $x^T(A^TA)x > 0$

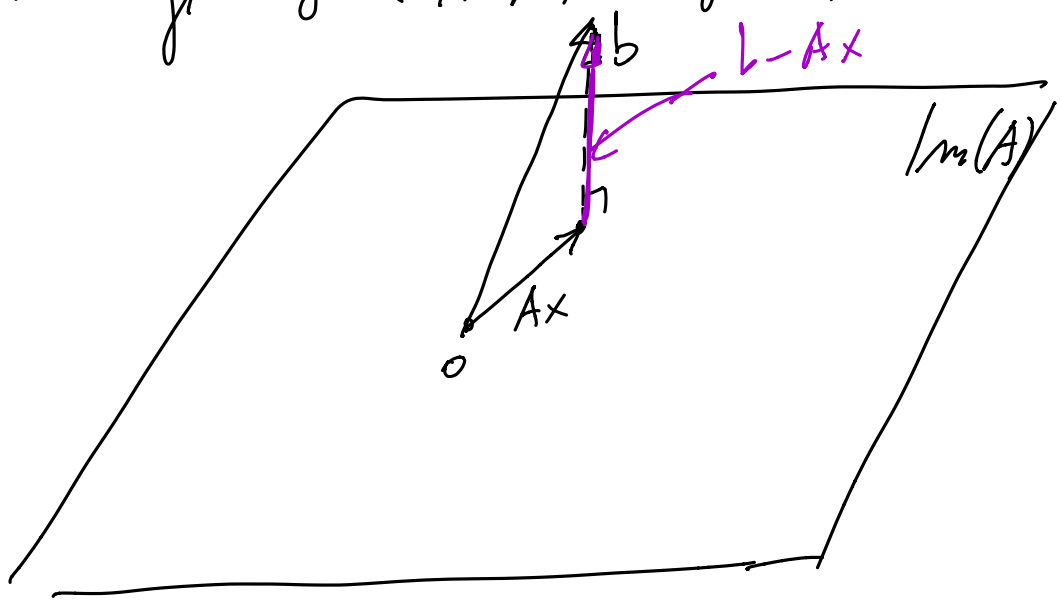
$$(x^TA^T)(Ax)$$

$$= (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0$$

Zakaj ni $\|Ax\|_2^2 = 0$?

Če bi $\|Ax\|_2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow$
$x \in \ker(A)$, kar ni mogoče, ker je
$x \neq 0$ in $\operatorname{rang}(A) = n$.

Metoda je numerično neuporabna,
ker je $\kappa(A^TA) \approx \kappa(A)^2$



$b - Ax \perp \operatorname{im}(A) \iff b - Ax \perp$ na $\forall$ stolpec matrike A ($\operatorname{rank} A = n$)

$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \Rightarrow$

$(b - Ax) \perp a_i, \forall i \Rightarrow$

$a_i^T (b - Ax) = 0, \forall i \Rightarrow$

$A^T (b - Ax) = 0$

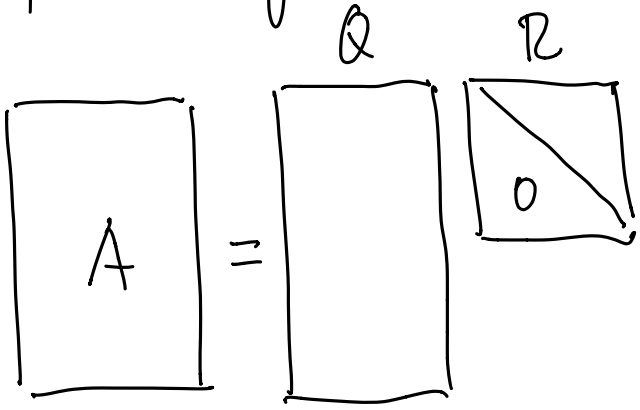
$$\boxed{A^T A x = A^T b}$$

② QR razcep

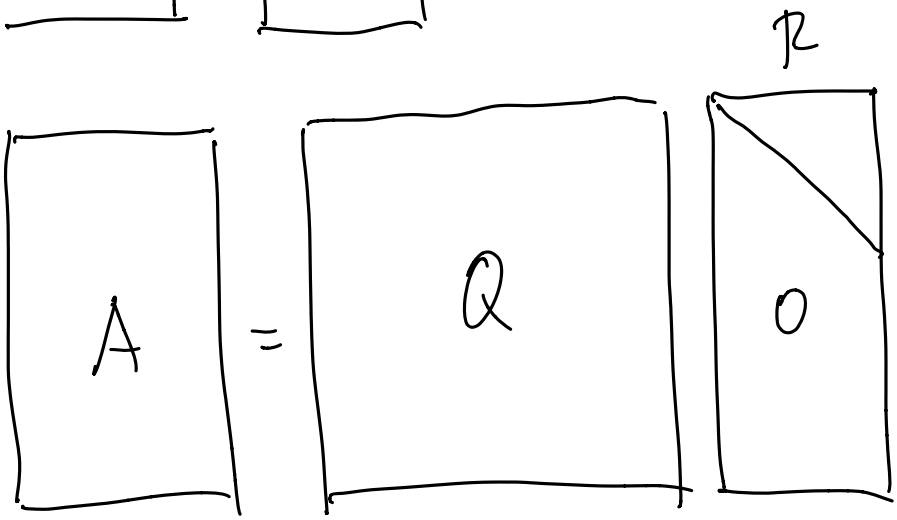
Def: Razcep $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika z ortonormiranimi stolpci in $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zgornja trikotna matrika, rečemo QR razcep (osnovni)

Če je $A = QR$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonalna matrika, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pa kvazi zgornja trikotna (zgornja trapezna matrika),

potem je to razširjeni QR razcep!



osnovni



razširjeni

Če poznamo osnovni razcep, potem rešitev po metodi min. kvad dobimo takole:

$$A^T A x = A^T b \; ; \quad A = QR$$

$$(QR)^T (QR) x = (QR)^T b$$

$$R^T \underbrace{(Q^T Q)} R x = R^T (Q^T b) \quad / (R^T)^{-1}$$

$$(R^T)^{-1} R^T I R x = (R^T)^{-1} R^T Q^T b$$

$$R x = Q^T b$$ obratno nastavljanje