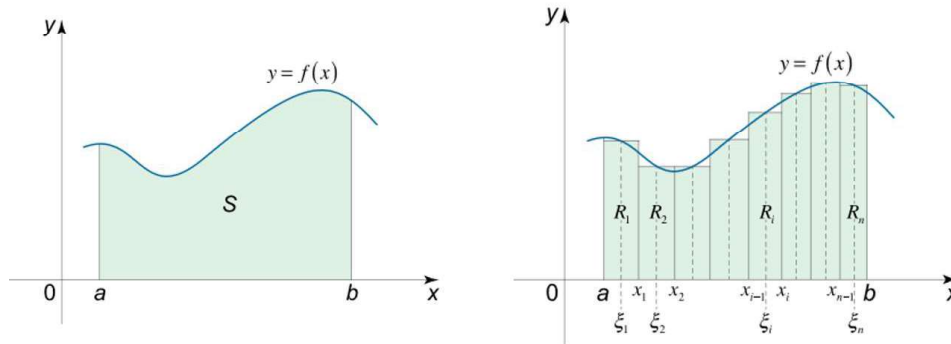


Določeni integral

Uros KUZMAN

Računamo predznačeno ploščino lika pod grafom funkcije f na $[a, b]$.



Riemannova definicija:

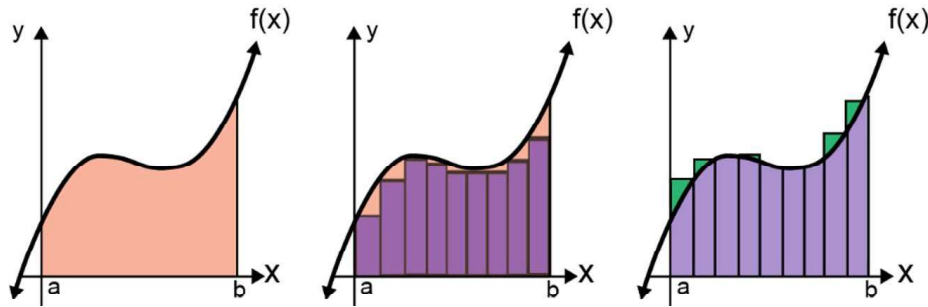
$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad R(f, D) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Funkcija f je (Riemannovo) integrabilna, če obstaja limita

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} R(f, D) =: \int_a^b f(x) dx.$$

Vsotam $R(f, D)$ pravimo Riemannove, točkam ξ_i pa testne.

Računamo predznačeno ploščino lika pod grafom funkcije f na $[a, b]$.



Darbouxova definicija:

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

$$M_i = \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t), \quad m_i = \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i]} f(t),$$

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i, \quad s(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i.$$

Funkcija f je (Darbouxovo) integrabilna na $[a, b]$, če velja

$$\sup_D s(f, D) = \inf_D S(f, D) =: \int_a^b f(x) dx.$$

Izrek

V splošnem velja $s(f, D) \leq R(f, D) \leq S(f, D)$, kadar pa 'v limiti' dobimo iste vrednost pa pravimo, da je f integrabilna t.j. definiciji sta ekvivalentni.

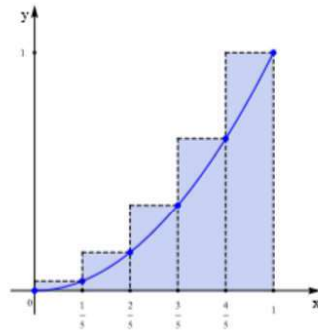
S pomočjo Riemannove vsote izračunaj integral

$$I = \int_0^1 x^2 dx.$$

Najenostavneje je, če izberemo delitev, v kateri je medsebojna oddaljenost točk enaka.

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Za testne točke izberemo desna krajišča $\xi_i = x_i$.



Približek za integral je

$$R(f, D) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.$$

POZOR: TO NI BIL DOKAZ, DA JE x^2 INTEGRABILNA NA $[0, 1]$,
KER RIEMANNOVA VSOTA NI BILA POLJUBNA.

Po definiciji izračunaj integral

$$I = \int_1^2 2^x dx.$$

Znova uporabimo ekvidistantno delitev

$$x_i = 1 + \frac{i}{n}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Za testne točke izberemo desna krajišča $\xi_i = x_i$. Imamo

$$R(f, D) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2^{1+\frac{i}{n}} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt[n]{2}\right)^i.$$

Dobili smo delno vsoto geometrijske vrste. V limiti imamo

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[n]{2}}{n} \frac{(\sqrt[n]{2})^n - 1}{\sqrt[n]{2} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[n]{2}}{n(\sqrt[n]{2} - 1)}.$$

Pomagamo si z L'Hospitalovim pravilom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt[n]{2}}{n(\sqrt[n]{2} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 2^x}{2^x - 1} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + x 2^x \cdot \ln 2}{2^x \cdot \ln 2} = \frac{2}{\ln 2}.$$

Podani sta funkciji

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

Obravnavaj njuno integrabilnost na $[0, 1]$.

Sumimo, da je g integrabilna, saj je nezvezna le v $x = 1$. Res, ker je g v vseh ostalih točkah ničelna, za poljubno Riemannovo vsoto velja

$$R(g, D) = \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i = g(\xi_n) \Delta x_n = \begin{cases} 0, & \xi_n \neq 1 \\ \Delta x_n, & \xi_n = 1 \end{cases}$$

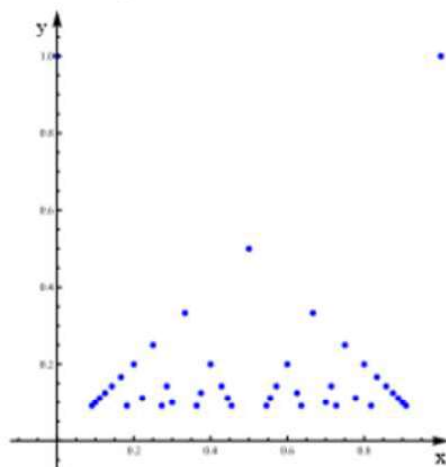
Ko pošljemo $\Delta x_n \rightarrow 0$, dobimo $I = 0$.

Nasprotno za h sumimo, da ni integrabilna. Res, če za ξ_i izberemo sama racionalna števila, je $R(h, D) = 1$ ne glede na delitev D . Če izberemo sama iracionalna števila je vedno $R(h, D) = 0$. Torej limita vsot $R(h, D)$ pri $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ne obstaja.

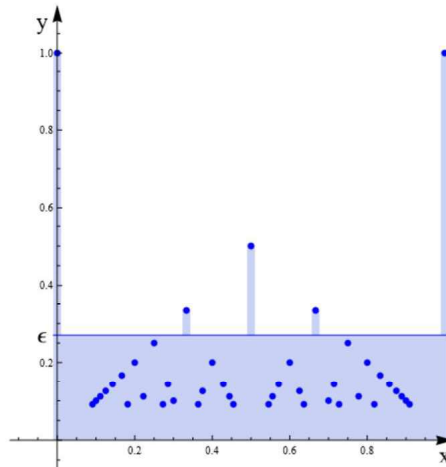
Funkcija $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \text{ je iracionalen,} \\ 1 & ; x = 0, \\ \frac{1}{n} & ; x = \frac{m}{n}, \text{ kjer sta si } m, n \in \mathbb{N} \text{ tuji.} \end{cases}$$

Izračunaj integral $\int_0^1 f(x) dx$.



Sumimo, da $I = 0$. Natančneje, pokazati moramo, da pri zelo 'fini' delitvi ni važno katere točke izberemo za testne. Lahko je njihova vrednost tudi 'daleč' od ničelne, saj jih je le končno mnogo.



Naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja le $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ točk, za katere je $f(x) \geq \epsilon$.
Naj bo $\max \Delta x_i \leq \frac{\epsilon}{k}$. Potem je

$$0 \leq R(f, D) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \leq \epsilon + k \cdot \frac{\epsilon}{k} \leq 2\epsilon.$$

ZANIMIVOST: Če komponiramo funkcije iz zadnjih dveh nalog, ugotovimo, da velja $\tilde{g}(f(x)) = h(x)$. Torej kompozitum dveh integrabilnih funkcij ni nujno integrabilen.

POPRAVEK:

DA SE TA RAČUN IZIDE, MORAMO

VZETI
$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0; & x=0 \\ 1; & x \in (0,1] \end{cases},$$

KI PA JE PRAV TAKO INTEGRABILNA.

V praksi za izračun določenih integralov uporabljamo osnovni izrek analize:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

kjer je F nedoločeni integral funkcije f .

Spomnimo tudi, kako pri določenem integralu uvajamo spremenljivko in integriramo po delih:

- Naj bo $x = g(t)$ za zvezno odvedljivo $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$. Potem je

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

t.j. v integral sočasno uvedemo tudi meje.

- Pri integraciji po delih moramo v mejah evalvirati tudi integrirani del t.j.

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Primer

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Vpeljemo $x = \sin t$ in $dx = \cos t dt$, da dobimo

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

Sedaj uporabimo formulo za kvadrat kosinusa

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Primer: Z integracijo po delih izračunaj

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Izberemo

$$u = \sin^{n-1} x, \quad dv = \sin x dx \Rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, \quad v = -\cos x.$$

$$I_n = \left[-\sin^{n-1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

Izrazimo

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Sedaj potrebujemo še dve začetni vrednosti:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Za lihe $n = 2k + 1$ torej velja

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \dots = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Za sode $n = 2k$ na enak način dobimo

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \dots = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} I_2 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

DODATNE NALOGE

① S POMOĆJO RIEMANNOVITIH ISOT IZRAČUNAJ

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^s + 2^s + \dots + n^s}{n^{s+1}}$$

(b) NAJ BO $f: [0,1] \rightarrow (0, \infty)$ ZVEZNA. POENOSTAVI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{n}{n}\right)}$$

② IZRAČUNAJ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx) dx, n \in \mathbb{N}.$

③ (a) NAJ BO $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ZVEZNA. DOKAŽI

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$$

(b) IZRAČUNAJ INTEGRAL

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$