

Vektorski prostori s skalarnim produktom - 2. del

4. Obstoj ortogonalne baze

Najprej ponovimo osnovne definicije. Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Množica $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ je

- **ortogonalna množica**, če velja $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za vsaka $i, j = 1, \dots, n$, kjer $i \neq j$, in če velja $v_i \neq 0$ za vsak $i = 1, \dots, n$.
- **ortonormirana množica**, če je ortogonalna množica in če velja $\|v_i\| = 1$ za vsak $i = 1, \dots, n$.
- **ortogonalna baza**, če je ortogonalna množica in če je ogrodje.
- **ortonormirana baza**, če je ortonormirana množica in če je ogrodje.

Spomnimo se, da je vsaka ortogonalna množica linearno neodvisna. Obratno seveda ni res. Lahko pa vsako linearno neodvisno množico s preprostim postopkom predelamo v ortogonalno množico, ne da bi pri tem spremenili njeno linearno ogrinjačo. Temu postopku pravimo **Gram-Schmidtova ortogonalizacija**. Oglejmo si, kako poteka.

Trditev (Gram-Schmidtova ortogonalizacija)

Naj bo $\{u_1, \dots, u_n\}$ baza. Definirajmo

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$$\vdots$$

$$v_n = u_n - \frac{\langle u_n, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_n, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \dots - \frac{\langle u_n, v_{n-1} \rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1} \rangle} v_{n-1}$$

Potem je $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonalna baza.

Dokaz. S popolno indukcijo bomo dokazali, da je za vsak $k = 1, \dots, n$ množica $\{v_1, \dots, v_k\}$ ortogonalna.

Ker je $v_1 = u_1 \neq 0$, je $\{v_1\}$ ortogonalna.

Recimo, da trditev drži za nek $k < n$. S pomočjo formule

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle u_{k+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \quad (1)$$

bomo dokazali, da trditev velja tudi za $k+1$. Če (1) skalarno pomnožimo z v_j za vsak $j = 1, \dots, k$ in upoštevamo ortogonalnost $\{v_1, \dots, v_k\}$, dobimo

$$\begin{aligned} \langle v_{k+1}, v_j \rangle &= \langle u_{k+1}, v_j \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle u_{k+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \langle u_{k+1}, v_j \rangle - \frac{\langle u_{k+1}, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} \langle v_j, v_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Torej so elementi množice $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ paroma ortogonalni.

Da bi dokazali ortogonalnost množice $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$, moramo še preveriti, da je $v_{k+1} \neq 0$. Če bi veljalo $v_{k+1} = 0$, potem bi dobili

$$u_{k+1} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle u_{k+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i \in \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}$$

Iz prvih k formul v Gram-Schmidtovi ortogonalizaciji sledi tudi

$$u_1, \dots, u_k \in \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}$$

Torej k -razsežen prostor $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}$ vsebuje linearno neodvisno množico $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}\}$, ki ima $k + 1$ elementov. To je protislovje.

Izrek o obstoju ortogonalne baze

Vsak končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom ima ortogonalno bazo. Poleg tega lahko vsako ortogonalno množico dopolnimo do ortogonalne baze.

Dokaz. Prvi del dokažemo tako, da vzamemo poljubno bazo in jo s pomočjo Gram-Schmidtove ortogonalizacije predelamo v ortogonalno bazo. Drugi del dokažemo tako, da ortogonalno množico $\{u_1, \dots, u_m\}$ najprej dopolnimo do običajne baze $\{u_1, \dots, u_m, \dots, u_n\}$ in potem uporabimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo. Dobimo $v_1 = u_1, \dots, v_m = u_m, \dots$ torej dobljena ortogonalna baza res vsebuje množico $\{u_1, \dots, u_m\}$. $\square$

Odtod z normiranjem vektorjev dobimo:

Posledica

Vsak končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom ima ortonormirano bazo. Poleg tega lahko vsako ortonormirano množico dopolnimo do ortonormirane baze.

Primer

Naj bo V vektorski prostor vseh realnih polinomov stopnje ≤ 3 in naj bo skalarni produkt na V definiran z $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$. Konstruirajmo ortonormirano bazo za V .

Vzemimo standardno bazo

$$u_1 = 1, \quad u_2 = x, \quad u_3 = x^2, \quad u_4 = x^3.$$

Z Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo dobimo

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = x - \frac{\langle x, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = x - 0v_1 = x$$

$$v_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle x^2, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$v_4 = x^3 - \frac{\langle x^3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle x^3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle x^3, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$$

Vektorji v_1, v_2, v_3, v_4 so (po dokazu izreka) ortogonalna baza za V . Izračunajmo sedaj njihove norme in njihove normalizacije:

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &= \int_{-1}^1 1 \, dx = 2, & \frac{v_1}{\|v_1\|} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \|v_2\|^2 &= \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3}, & \frac{v_2}{\|v_2\|} &= \sqrt{\frac{3}{2}} x, \\ \|v_3\|^2 &= \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 \, dx = \frac{8}{45}, & \frac{v_3}{\|v_3\|} &= \sqrt{\frac{45}{8}} (x^2 - \frac{1}{3}), \\ \|v_4\|^2 &= \int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 \, dx = \frac{8}{175}, & \frac{v_4}{\|v_4\|} &= \sqrt{\frac{175}{8}} (x^3 - \frac{3}{5}x). \end{aligned}$$

Normalizirani vektorji tvorijo ortonormirano bazo za V .

Opomba: Iz tega primera vidimo, da je ortonormirana baza običajno vključuje komplicirane korene. Za računske namene so zato pogosto boljše ortogonalne baze. Za teoretične namene pa so boljše ortonormirane baze.

5. Prednosti ortogonalnih baz

Glavna prednost je, da je vektor preprosteje razviti po ortogonalni bazi.

Izrek (Fourierov razvoj)

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonalna baza za V . Potem za vsak element $v \in V$ velja

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i.$$

Če je baza ortonormirana, se formula poenostavi v $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$.

Dokaz: Ker je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza za V , obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, da velja $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Če to enakost skalarno pomnožimo z v_j za nek j , dobimo $\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$. Pri zadnjem enačanju smo upoštevali, da je $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ za vse i , ki so različni od j . Odtod izrazimo $\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$. Sledi $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$. □

Druga prednost ortogonalnih baz je, da je iz razvoja elementa po taki bazi zelo preprosto izračunati njegovo normo. Iz $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ namreč sledi $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\alpha}_i \langle v_i, v_i \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \langle v_i, v_i \rangle$. Odtod za $\alpha_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$ dobimo:

Izrek (Parsevalova identiteta)

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonalna baza za V . Potem za vsak element $v \in V$ velja

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, v_i \rangle|^2}{\langle v_i, v_i \rangle}.$$

Če je baza ortonormirana, se formula poenostavi v $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$.

Tretja prednost ortogonalnih baz je, da je zelo preprosto izračunati ortogonalno projekcijo vektorja na podprostor.

Definicija ortogonalne projekcije

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom, v vektor iz V in W vektorski podprostor v V . Vektorju iz W , ki je najbližje vektorju v , pravimo **ortogonalna projekcija** vektorja v na podprostor W .

Opomba: Razdalja med dvema vektorjema $v \in V$ je definirana kot norma njune razlike. Ortogonalna projekcija vektorja $v \in V$ na podprostor $W \subseteq V$ je torej tak vektor $v' \in W$, da velja

$$\|v - w\| > \|v - v'\|$$

za vsak vektor $w \in W$, ki je različen od vektorja v' .

Izrek o ortogonalni projekciji

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in W končnorazsežen vektorski podprostor v V z ortogonalno bazo $\{w_1, \dots, w_k\}$. Potem je ortogonalna projekcija vektorja $v \in V$ na podprostor W dana s formulo

$$v' = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i.$$

Če je baza ortonormirana, se formula poenostavi v $v' = \sum_{i=1}^k \langle v, w_i \rangle w_i$.

Opomba: V dokazu bomo uporabili Pitagorov izrek, ki pravi, da za pravokotna vektorja a in b velja

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

To dokažemo z direktnim računom

$$\langle a + b, a + b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle.$$

Dokaz izreka: Ker je v' linearna kombinacija vektorjev w_i iz W , je v' element W . Radi bi pokazali, da za vsak $w \in W$, ki je različen od v' , velja $\|v - w\| > \|v - v'\|$. Vzemimo poljuben w iz W in ga razvijmo po bazi za W . Dobimo $w = \sum_{i=1}^k \beta_i w_i$, kjer je $\beta_i = \frac{\langle w, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}$ za vse i . Pišimo $v' = \sum_{i=1}^k \alpha_i w_i$, kjer je $\alpha_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle}$ za vse i .

1.korak Dokažimo, da je vektor $v - v'$ pravokoten na vse w_i ,

Velja $\langle v - v', w_j \rangle = \langle v, w_j \rangle - \langle v', w_j \rangle = \langle v, w_j \rangle - \sum_{i=1}^k \alpha_i \langle w_i, w_j \rangle = \langle v, w_j \rangle - \alpha_j \langle w_j, w_j \rangle = 0$.

2.korak Dokažimo, da je vektor $v - v'$ pravokoten na vektor $v' - w$,

Velja $\langle v - v', v' - w \rangle = \langle v - v', \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \beta_i) w_i \rangle = \sum_{i=1}^k (\alpha_i - \beta_i) \langle v - v', w_i \rangle = 0$ po 1. koraku.

3.korak Dokažimo, da je $\|v - w\|^2 = \|v - v'\|^2 + \|v' - w\|^2$.

To je ravno Pitagorov izrek za vektorja $a = v - v'$ in $b = v' - w$, ki sta pravokotna po 2. koraku.

Iz 3. koraka sledi, da je $\|v - w\|^2 > \|v - v'\|^2$, če je $v' \neq w$. □

6. Ortogonalni komplement

Definicija ortogonalnega komplementa

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in naj bo S podmnožica v V . Pravimo, da je vektor $v \in V$ **ortogonalen** na množico S , če velja $\langle v, s \rangle = 0$ za vsak $s \in S$. Množico vseh vektorjev iz V , ki so ortogonalni na množico S , označimo z $S^\perp$ in ji pravimo **ortogonalni komplement** S .

Trditev

Za vsako podmnožico S v V je $S^\perp$ vektorski podprostor v V .

Dokaz: Če v_1 in v_2 pripadata $S^\perp$, je (po definiciji $S^\perp$) $\langle v_1, s \rangle = 0$ in $\langle v_2, s \rangle = 0$ za vsak $s \in S$. Potem je za vsaka skalarja α_1 in α_2 tudi $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, s \rangle = \alpha_1 \langle v_1, s \rangle + \alpha_2 \langle v_2, s \rangle = 0$ za vsak $s \in S$. Odtod sledi (spet po definiciji $S^\perp$), da je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in S^\perp$ za vsaka α_1 in α_2 . $\square$

Za vsako podmnožico S v V je $S^\perp = (\text{Lin} S)^\perp$.

Dokaz: Če je vektor v ortogonalen na elemente $s_1, \dots, s_k$, potem je ortogonalen tudi na vsako njihovo linearno kombinacijo, saj velja

$$\langle v, \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k \rangle = \bar{\alpha}_1 \langle v, s_1 \rangle + \dots + \bar{\alpha}_k \langle v, s_k \rangle = 0 + \dots + 0 = 0$$

Naslednji primer bo pomemben v nadaljevanju:

Primer ortogonalnega komplementa

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom, $\{u_1, \dots, u_k\}$ ortogonalna množica v V in $\{v_1, \dots, v_l\}$ njena dopolnitev do ortogonalne baze za V . Potem je $(\text{Lin}\{u_1, \dots, u_k\})^\perp = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_l\}$.

Dokaz: Vzemimo poljuben element $v \in V$ in ga razvijmo po bazi za V . Dobimo $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^l \beta_j v_j$. Ker je $\langle v, u_i \rangle = \alpha_i \langle u_i, u_i \rangle$, je v ortogonalen na vse u_i natanko tedaj, ko so vsi α_i enaki nič. To pa velja natanko tedaj, ko je $v \in \text{Lin}\{v_1, \dots, v_l\}$.

Izrek o ortogonalnem razcepu

Naj bo V končnorazsežen prostor s skalarnim produktom in naj bo U podprostor v V . Potem velja naslednje:

- 1 $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.
- 2 $(U^\perp)^\perp = U$.
- 3 $V = U \oplus U^\perp$.

Dokaz: Naj bo $\{u_1, \dots, u_k\}$ ortogonalna baza za U in naj bo $\{v_1, \dots, v_l\}$ njena dopolnitev do ortogonalne baze za V .

Po primeru je $U^\perp = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_l\}$. Torej je $\dim U + \dim U^\perp = k + l$, kar je enako $\dim V$. To nam da prvo trditev.

Drugi del dokažemo tako, da v primeru zamenjamo bazo iz u_i z bazo iz v_j . Ker je $\{v_1, \dots, v_l\}$ ortogonalna baza za $U^\perp$, in ker je $\{u_1, \dots, u_k\}$ njena dopolnitev do ortogonalne baze za V , je $(U^\perp)^\perp = \text{Lin}\{u_1, \dots, u_k\}$.

Tretji del sledi iz $V = \text{Lin}\{u_1, \dots, u_k\} \oplus \text{Lin}\{v_1, \dots, v_l\}$ in primera. $\square$

Opomba: Formuli $V = U \oplus U^\perp$ pravimo **ortogonalni razcep** prostora V glede na podprostor U .

To formulo lahko dokažemo tudi s pomočjo izreka o ortogonalni projekciji. Za vsak element $v \in V$ lahko izračunamo njegovo projekcijo v' na podprostor U . Iz dokaza izreka o ortogonalni projekciji vemo, da je vektor $v - v'$ pravokoten na vse vektorje podprostora U . Velja torej $v - v' \in U^\perp$. Iz $v = v' + (v - v')$ torej sledi, da je vsak element iz V vsota elementa iz U in elementa iz $U^\perp$, kar dokaže formulo $V = U + U^\perp$. Treba je preveriti še $U \cap U^\perp = \{0\}$. Vsak element $u \in U$, ki je pravokoten na vse elemente iz u , je pravokoten tudi sam nase, torej je enak nič. $\square$

5. Linearni funkcionali

Linearni funkcionali so zelo posebni primeri linearnih preslikav.

Definicija

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom F . Linearni preslikavi iz V v F pravimo **linearen funkcional** na V .

Opomba: V definiciji smo upoštevali, da je tudi F vektorski prostor nad F . To je poseben primer vektorskega prostora F^n za $n = 1$.

Primeri linearnih funkcionalov

Naj bo V vektorski prostor vseh realnih polinomov stopnje $\leq n$. Potem sta

$$\phi(p) = \int_0^1 p(x) dx \quad \text{in} \quad \psi(p) = p(1)$$

dva primera linearnih funkcionalov na V .

Podobno kot vsaki drugi linearni preslikavi, lahko tudi linearnemu funkcionalu priredimo matriko. Naslednje trditev je očitna.

Trditev (Matrika linearnega funkcionala)

Naj bo L linearen funkcional na vektorskem prostoru V , naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza za V in naj bo $\mathcal{S} = \{1\}$ standardna baza za F . Matrika L glede na ti dve bazi ima eno vrstico in n stolpcev. Velja

$$[L]_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} L(v_1) & \dots & L(v_n) \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo matriki linearnih funkcionalov iz primera:

Nadaljevanje primera

Naj bo $\mathcal{B} = \{1, x, \dots, x^n\}$ in naj bosta ϕ ter ψ kot zgoraj. Potem je

$$[\phi]_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \quad [\psi]_{\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

O linearnih funkcionalih na vektorskih prostorih s skalarnim produktom lahko povemo precej več. Začnimo s preprostim primerom.

Primer

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom in $w \in V$. Potem je

$$\phi_w(v) := \langle v, w \rangle$$

linearen funkcional na V .

Dokaz: To sledi iz linearnosti skalarnega produkta v prvem faktorju.

Izkaže se, da ta primer ni tako preprost, saj nam da vse linearne funkcionalne na končnorazsežnih vektorskih prostorih s skalarnim produktom.

Rieszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom in naj bo ϕ linearen funkcional na V . Potem obstaja tak vektor $w \in V$, da je

$$\phi(v) = \langle v, w \rangle$$

za vsak $v \in V$. Vektor w je enolično določen.

Izrek lahko povemo tudi takole. Vsak linearen funkcional na V je oblike ϕ_w (glej primer) za natanko določen $w \in V$.

Dokaz: Naj bo $v_1, \dots, v_n$ ortonormirana baza za V . Vzemimo poljuben $v \in V$ in ga razvijmo po tej bazi. Velja $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$. Odtod sledi $\phi(v) = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \phi(v_i)$ zaradi linearnosti ϕ . Če upoštevamo še konjugirano linearnost skalarnega produkta v drugem faktorju, dobimo $\sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \overline{\phi(v_i)} = \sum_{i=1}^n \langle v, \overline{\phi(v_i)} v_i \rangle = \langle v, \sum_{i=1}^n \overline{\phi(v_i)} v_i \rangle$. Označimo $w = \sum_{i=1}^n \overline{\phi(v_i)} v_i$ in opazimo, da ta vektor ni odvisen od v , ampak samo od ϕ in od baze. Dokazali smo, da velja $\phi(v) = \langle v, w \rangle$ za vsak $v \in V$.

Pokažimo še, da je vektor w enolično določen s funkcionalom ϕ . Če velja $\phi(v) = \langle v, w_1 \rangle$ za vsak $v \in V$ in $\phi(v) = \langle v, w_2 \rangle$ za vsak $v \in V$, potem $0 = \phi(v) - \phi(v) = \langle v, w_1 \rangle - \langle v, w_2 \rangle = \langle v, w_1 - w_2 \rangle$ za vsak $v \in V$. Vstavimo $v = w_1 - w_2$ in dobimo $\langle w_1 - w_2, w_1 - w_2 \rangle = 0$. Vemo, da odtod sledi $w_1 - w_2 = 0$, se pravi $w_1 = w_2$. □