

Naj bo $D = p^2 - 4q < 0$. Izračunaj integrala

a) $I_1 = \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx,$

b) $I_2 = \int \frac{dx}{x^2+px+q}$ ~~dx~~ .

Prvi integral je preprost, zgolj uvedemo $t = x^2 + px + q$ in dobimo

$$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x^2 + px + q| + C.$$

Drugega bomo skušali prevesti na integral funkcije arctan.

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 - \frac{p^2}{4} + q} = \frac{1}{(x + \frac{p}{2})^2 + \frac{-D}{4}} = \frac{4}{-D} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} \right)^2} \right)$$

Sedaj uvedemo spremenljivko $t = \frac{2x+p}{\sqrt{-D}}$. Dobimo

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{4}{-D} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-D}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{-D}} \int \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{-D}} \arctan \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} \right) + C. \end{aligned}$$

Trik (4)

Če v P nastopa nerazcepen kvadratni polinom $x^2 + px + q$, bosta v rezultatu tudi naslednja člena

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \dots + A \ln |x^2 + px + 1| + B \arctan \left(\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} \right) + \dots$$

Primer:

$$I = \int \frac{16x^2 + 16}{x^4 + 4} dx.$$

Najprej potrebujemo razcep za $x^4 + 4$. Pomagamo si s kompleksnimi števili oz. rešitvami za $x^4 = -4$. Te so $x = \pm 1 \pm i$ oz. velja

$$x^4 + 4 = (x - (1+i))(x + (1+i))(x - (1-i))(x + (1-i)) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$$

V obeh primerih je $D = 4 - 8 = -4$.

$$\begin{aligned} I &= A \ln |x^2 - 2x + 2| + B \arctan \left(\frac{2x - 2}{2} \right) \\ &+ C \ln |x^2 + 2x + 2| + D \arctan \left(\frac{2x + 2}{2} \right) + E. \end{aligned}$$

To odvajamo:

$$\frac{16x^2 + 16}{x^4 + 4} = \frac{A(2x - 2)}{x^2 - 2x + 2} + \frac{B}{x^2 - 2x + 2} + \frac{C(2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} + \frac{D}{x^2 - 2x + 2}.$$

Nato določimo konstante: $A = 1$, $B = 6$, $C = -1$, $D = 6$.

Trik (5)

Če v P nastopa potenca nerazcepnega kvadratnega polinoma $(x^2 + px + q)^k$, bodo v rezultatu tudi naslednji členi

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \dots + A \ln |x^2 + px + \textcolor{red}{q}| + B \arctan \left(\frac{2x + p}{\sqrt{-D}} \right) \textcolor{red}{+} \\ + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{C_{k-1} x + D_{k-1}}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots$$

Trik (Univerzalni nastavek za racionalne funkcije)

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)} dx = \frac{\tilde{Q}(x)}{\tilde{P}(x)} + \sum_j C_j \ln |x - a_j| \\ + \sum_k \left(E_k \ln |x^2 + p_k x + q_k| + F_k \arctan \left(\frac{2x + p_k}{\sqrt{-D_k}} \right) \right),$$

kjer ima $\tilde{P}$ enake faktorje kot P , le potence so znižane za eno stopnjo. Polinom $\tilde{Q}$ pa ima neznane koeficiente in stopnjo st $\tilde{Q} = \text{st } \tilde{P} - 1$.

Opomba: Predpostavili smo, da $\text{st } Q < \text{st } P$, sicer predhodno delimo.

Primer

$$I = \int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4} dx.$$

Imamo

$$25x^2 + x^4 = x^2(x^2 + 25).$$

Diskriminanta kvadratnega člena je $D = -100$. Po nastavku dobimo

$$I = A \ln |x| + B \ln |x^2 + 25| + C \arctan \frac{x}{5} + \frac{D}{x} + E.$$

Preveri, da je $A = C = D = 1$ in $B = 0$.