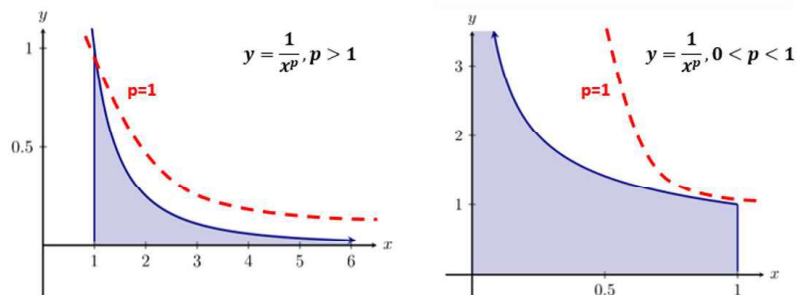


Posplošnih ne znamo vedno izračunati, lahko pa se s primerjanjem omejimo zgolj na obravnavo konvergence. V nadaljevanju bomo predstavili preprost kriterij, s katerim si pri tem pomagamo.

Kriterij se opira na primerjavo z naslednjima dvema integraloma:



$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left[ +\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty}, & p \neq 1 \\ [\ln x]_1^{\infty}, & p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \left[ +\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_0^1, & p \neq 1 \\ [\ln x]_0^1, & p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & p < 1 \\ \infty, & p \geq 1 \end{cases}$$

Prvi obstaja natanko za  $p > 1$ , drugi pa natanko za  $p < 1$ .

## Izrek

Naj bo  $g$  zvezna na  $(a, \infty)$  z limito  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ . Za integral

$$I = \int_a^{\infty} \frac{g(x)}{x^p} dx$$

veljata naslednja sklepa:

- Če  $p > 1$ , integral konvergira.
- Če  $p \leq 1$  in  $L \neq 0$ , integral divergira.

## Izrek

Naj bo  $g$  zvezna na  $(a, b)$  z limito  $L = \lim_{x \searrow a} g(x)$ . Za integral

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{(x - a)^p} dx$$

veljata naslednja sklepa:

- Če  $p < 1$ , integral konvergira.
- Če  $p \geq 1$  in  $L \neq 0$ , integral divergira.

Primer:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Obravnavati je treba singularnosti v  $x = \infty$  in  $x = 1$ . Pri  $x = \infty$  se integrand 'obnaša kot'  $\frac{1}{x^2}$  zato sumimo, da tam konvergira. Res,

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}{x^2} = \frac{g(x)}{x^s}.$$

Ker je  $s = 2 > 1$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$ , integral konvergira.

Sedaj obravnavamo  $x = 1$  kjer se integrand 'obnaša kot'  $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$  zato sumimo, da tudi tam konvergira. Res,

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{g(x)}{x^s}.$$

Ker je  $s = \frac{1}{2} < 1$  in  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , integral tudi v tej točki nima težav s konvergenco.

Primer:

$$\int_0^{\pi} \frac{e^x - 1}{x^2} dx.$$

Zdi se, da se integral pri  $x = 0$  'obnaša kot'  $\frac{1}{x^2}$  in da divergira. Vendar pa velja

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = 0,$$

zato po izreku ne moremo ne moremo sklepati na divergenco. Za neničelno limto moramo izraz preoblikovati

$$\frac{e^x - 1}{x^2} = \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{x} = \frac{g(x)}{x}.$$

Sedaj je  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$  in  $s = 1$  zato integral divergira.

**POZOR:** Neničelno limto rabiš le, ko dokazuješ divergenco.

Primer:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{3 + 2x^2} dx.$$

Znova imamo dve singularnosti,  $x = \infty$  in  $x = 0$ . Obravnavajmo najprej  $x = \infty$ , kjer je imenovalec sicer ustrezne stopnje, a gre števec v neskončnost. Vseeno lahko naraščanje logaritma zajezimo in hrati ohranimo ustrezno stopnjo. Res,

$$\frac{\ln x}{3 + 2x^2} = \frac{x^{\frac{3}{2}} \frac{\ln x}{3 + 2x^2}}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{g(x)}{x^s}.$$

Ker je  $s > 1$  in  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ , integral obstaja.

Sedaj si oglejmo  $x = 0$ . Logaritem gre proti  $-\infty$ , imenovalec pa nima pola. Ker je logaritemski pol 'šibkejši' od katerega koli potenčnega, sumimo, da integral obstaja. Res,

$$\frac{\ln x}{3 + 2x^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{3 + 2x^2}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{g(x)}{x^s}.$$

Ker je  $s > 1$  in  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$  (L'Hospital), integral obstaja.

V odvisnosti od  $0 < a < b$  obravnavaj konvergenco integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^a + x^b}.$$

Integral ima singularnosti v  $x = 0$  in  $x = \infty$ . V prvi se obnaša kot  $\frac{1}{x^a}$  v drugi pa kot  $\frac{1}{x^b}$ . Res,

$$\frac{1}{x^a + x^b} = \frac{\frac{1}{1+x^{b-a}}}{x^a} = \frac{g_1(x)}{x^a}.$$

$$\frac{1}{x^a + x^b} = \frac{\frac{1}{1+x^{a-b}}}{x^b} = \frac{g_2(x)}{x^b}.$$

Imamo  $\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g_2(x) = 1$ . Zato integral konvergira natanko tedaj, ko je  $b > 1$  in  $a < 1$ .

DODATNE NALOGE: UGOTOVI, ALI INTEGRALI KONVERGIRAJO.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

$$(b) \int_{-1}^{\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx$$

$$(c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, k \in [0,1].$$

$$(d) \int_{\sqrt{a}}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-a)^{2a}}, a > 0.$$

REŠITVE:

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

INTEGRAL IMA DVE SINGULARNOSTI V  $x=0$  IN  $x=\infty$ .

$x=0$ : FUNKCIJA  $\frac{1}{x}$  SICER NI INTEGRABILNA, A JE NJEN POL V RESNICI NIŽJI, SAJ JE TUDI  $\arctan x = 0$  ZA  $x=0$ . ŠE VEČ, VELJA:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \stackrel{\text{L'H.}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

SKLEP:  $\frac{\arctan x}{x}$  V  $x=0$  NI NEOMEJENA, ZATO V TEJ SINGULARNOSTI NIMAMO TEŽAV.

$x=\infty$ : VELJA  $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ , ZATO SE INTEGRAND TAM OBRABA KOT  $\frac{1}{x}$  IN NI KONVERGENTEN.

DOKAZ:

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{g(x)}{x^1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2} \neq 0 \\ S=1 \end{array} \right\} \text{INTEGRAL DIVERGIRA.}$$

KOMENTAR: DOVOLJ BI BILO DOKAZATI LE DIVERGENCO ZA  $x=\infty$ .

$$(b) \int_{-1}^{\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^7}} dx$$

INTEGRAND IMA TEŽAVE PRI  $x = -1$  IN  $x = \infty$ .

$$\underline{x = -1}: \text{VELJA } \sqrt[3]{1+x^7} = \sqrt[3]{(1+x)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)}$$

t.j. PRI  $x = -1$  IMAMO POL STOPNJE  $\frac{1}{3}$  ZATO SUMIMO, DA INTEGRAL OBSTAJA.

DOKAZ:

$$\frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{\frac{x \cdot \arctan x}{\sqrt[3]{x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1}}}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{g(x)}{(1+x)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \frac{(-1) \cdot (-\frac{\pi}{4})}{\sqrt[3]{6}} = \frac{\pi}{4\sqrt[3]{6}}, \quad s = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{INTEGRAL KONVERGIRA}$$

$x = \infty$  ZNOVA GRE  $\arctan x$  PROTI  $\frac{\pi}{2}$ , ZATO SE INTEGRAND PRI  $\infty$  VEDE KOT  $\frac{x}{\sqrt[3]{x^7}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}$ . TOREJ SPET SUMIMO NA KONVERGENCO.

$$\frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^7}} = \frac{x \arctan x}{x^{\frac{7}{3}} \sqrt[3]{\frac{1}{x^7} + 1}} = \frac{\frac{\arctan x}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^7} + 1}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{g(x)}{x^{\frac{4}{3}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{0+1}} = \frac{\pi}{2}, \quad s = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{INTEGRAL KONVERGIRA.}$$

$$(c) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k \in [0,1].$$

LOČIMO TRI PRIMERE:

$$(i) \quad k=0: \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{KONVERGIRA}$$

(ii)  $k \in (0,1)$ . INTEGRAND IMA POLE V  $x = \pm 1$  IN  $x = \pm \frac{1}{k}$ , Vendar je v  $[0,1]$  zbolj  $x=1$ .

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1-k^2x^2)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{g(x)}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} \quad , \quad s = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{KONVERGIRA}$$

(iii)  $k=1$ : INTEGRAND IMA POLA PRI  $x=\pm 1$ , ZA  
OBRAVNAVO PA JE ZARIMIV LE  $x=1$ .

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2)}} = \frac{1}{|1-x^2|} = \frac{1}{|1+x|} = \frac{1}{1+x} = \frac{g(x)}{(1-x)^1}$$

ZA  $x \rightarrow 1$

t.j.  $x < 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2} \quad , \quad s=1 \Rightarrow \text{INTEGRAL DIVERGIRA.}$$

$$(d) \int_{\sqrt{a}}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-a)^{2a}} \quad , \quad a > 0.$$

INTEGRAL IMA TEŽAVI PRI  $x=\sqrt{a}$  IN  $x=\infty$ .

$$\underline{x=\sqrt{a}}: \frac{1}{(x-\sqrt{a})^1(x+\sqrt{a})^{2a}} = \frac{1}{(x+\sqrt{a})^{2a}} = \frac{g(x)}{(x-\sqrt{a})^{2a}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} g(x) = \frac{1}{(2\sqrt{a})^{2a}} \neq 0 \quad , \quad s=2a.$$

SKLEP: INTEGRAL JE KONVERGENTEN NATANKO TEDIJ,  
KO JE  $2a < 1$  OZ.  $a < \frac{1}{2}$ .

$$\underline{x=\infty}: \frac{1}{(x^2-a)^{2a}} = \frac{1}{(1-\frac{a}{x^2})^{2a}} = \frac{g(x)}{x^{4a}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1 \neq 0 \quad s=4a.$$

SKLEP: INTEGRAL JE KONV. NATANKO TEDIJ, KO JE  $4a > 1$ .

KONČNI SKLEP:  $\left\{ \text{INTEGRAL KONVERGIRA NATANKO ZA } a \in \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}$ .