

LINEARNA ALGEBRA 2020/21
23. VAJE: 7. 4. 2021

1. Izračunaj $\sqrt{A}, \sqrt{I+A}, \exp(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Pokaži, da je $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$ skalarni produkt na $M_n(\mathbb{R})$. Pokaži, da so matrične enote ortogonalne. Pokaži, da $\text{tr}(AB)$ ni skalarni produkt.
3. Naj bodo $\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ različna realna števila. Pokaži, da je

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p(a_i)q(a_i)$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ ne pa tudi na $\mathbb{R}_n[x]$.

Pokaži, da je množica $\{l_i \mid i = 1, \dots, n\}$, kjer je

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

ortonormirana.

4. Naj bodo $\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ različna kompleksa števila. Pokaži, da je

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p(a_i)\overline{q(a_i)}$$

skalarni produkt na $\mathbb{C}_{n-1}[x]$ ne pa tudi na $\mathbb{C}_n[x]$.

Pokaži, da je množica $\{l_i \mid i = 1, \dots, n\}$, kjer je

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

ortonormirana.

5. Pokaži $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ je skalarni produkt na prostoru zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Pokaži, da so $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ ortogonalni.
6. Pokaži, da je vse zvezne $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

1. Izračunaj $\sqrt{A}$, $\sqrt{I+A}$, $\exp(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \frac{f''(\lambda_1)}{2!} & \frac{f'''(\lambda_1)}{3!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \frac{f''(\lambda_1)}{2!} & & \\ & & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & & \\ & & & f(\lambda_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Če obstaja $f^{(i)}(\lambda)$ za $i=0, 1, \dots, n-1$!

Splaskni nku matrica A

$$A = P J_A P^{-1}$$

Jordanova forma

$$J_A = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix}$$

$$f(A) = P f(J_A) P^{-1}$$

$$f(J_A) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_k) \end{bmatrix}$$

Izračunamo Jordanovo formo

$$p_A = (1-\lambda)^3 \quad A-I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (A-I)^2 = 0$$

$\ker(A-I)$

baza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \text{z} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dopolnimo do baze } \ker(A-I)^2 = \mathbb{C}^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{A-I} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dopolnimo do baze $\ker(A-I)$ z vpr. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad J_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = P A P^{-1}$$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$f(J_A) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = P f(J_A) P^{-1} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Izračunano lahko $f(A)^2 = I + A$ (obstaja velika matrica za katere velja $X^2 = I + A$ (več kot 2!))

$$g(x) = \sqrt{x} \quad g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(J_A) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} e & e \\ & e \\ & & e \end{bmatrix}$$

$$e^A = e \cdot A$$

(Trivial: Matricna diferencialna enačba $\dot{X}(t) = AX(t)$ $X(0) = B$
ima rešitev $X = B \cdot e^{At}$)

Skalarni produkt

V -vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$)

skalarni produkt $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C} \ (\mathbb{R})$

① Linearlost: $\forall x, y, z \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \ (\mathbb{R})$

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

② konjugirana simetričnost (posebna / Hermitska simetričnost $\forall x, y \in V$)

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

Če je V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, je $\overline{\langle y, x \rangle} = \langle y, x \rangle$. V tem primeru pogoj imenujemo simetričnost.

③ Pozitivnost (pozitivna definitnost) $\forall x \in V$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{in} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

① + ② konj. linearlost: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle$.

Opomba: V (tuji) literaturi se včasih zahteva linearnost v drugem faktorju in posledično konjugirana linearnost v prvem.

Primer: $V = \mathbb{C}^n$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \leadsto y^H = [\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n]$
 standardni skalarni produkt $\downarrow$ $\langle x, y \rangle = y^H x = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$
 matrično množenje (to je razlog zakaj bi želeli linearnost v drugem faktorju)

2. Pokaži, da je $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$ skalarni produkt na $M_n(\mathbb{R})$. Pokaži, da so matrične enote ortogonalne. Pokaži, da $\text{tr}(AB)$ ni skalarni produkt.

Nad $\mathbb{C}$ $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^H)$ $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ $B^H = (\bar{b}_{ji})_{i,j=1}^n$

• $\langle \alpha A + \beta B, C \rangle = \text{tr}(C^T(\alpha A + \beta B)) = \text{tr}(\alpha C^T A + \beta C^T B) = \alpha \text{tr}(C^T A) + \beta \text{tr}(C^T B) = \alpha \langle A, C \rangle + \beta \langle B, C \rangle$

• $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T C) = \text{tr}((B^T A)^T) = \text{tr}(A^T B^T) = \text{tr}(A^T B) = \langle B, A \rangle$

• $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ $A^T = (a_{ji})_{i,j=1}^n$ $\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n (A^T A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{ki})^2 \geq 0$ kvadrati so nenegativni
 če je $\sum_{i=1}^n (a_{ii})^2 = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \forall i, j \Rightarrow A = 0$.

$(A^T A)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{ki}$

$(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$ ni skalarni produkt. Velja linearnost in simetričnost (bilinearna forma)

Ne velja pozitivna definitnost.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = 0$$

$$\text{tr}(A^2) = 0 \quad A \neq 0$$

$$\text{Ali } B = \begin{bmatrix} -1 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(B^2) = -2 < 0$$

3. Naj bodo $\{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$ različna realna števila. Pokaži, da je

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p(a_i) q(a_i)$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ ne pa tudi na $\mathbb{R}_n[x]$.

Pokaži, da je množica $\{l_i \mid i = 1, \dots, n\}$, kjer je

$$l_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

ortonormirana.

$$\bullet \quad \langle \alpha p + \beta q, r \rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha p(a_i) + \beta q(a_i)) r(a_i) = \alpha \sum_{i=1}^n p(a_i) r(a_i) + \beta \sum_{i=1}^n q(a_i) r(a_i) =$$

$$= \alpha \langle p, r \rangle + \beta \langle q, r \rangle \quad \leftarrow \text{to velja za vse funkcije } p, q, r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p(a_i) q(a_i) = \sum_{i=1}^n q(a_i) p(a_i) = \langle q, p \rangle$$

$$\bullet \quad \langle p, p \rangle = \sum_{i=1}^n p(a_i) p(a_i) = \sum_{i=1}^n p(a_i)^2 \geq 0$$

Naj bo $\langle p, p \rangle = 0$ in p - polinom stopnje največ $n-1$

Neizčlen polinom stopnje k ima največ k ničel!

$$\sum_{i=1}^n p(a_i)^2 = 0 \Rightarrow p(a_i) = 0 \quad \forall i=1 \dots n \Rightarrow p \text{ ima vsaj } n (> n-1) \text{ ničel} \\ \Rightarrow p \equiv 0.$$

Obstaja q polinom stopnje n , za katerega je $\langle q, q \rangle = 0$

$$q(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i).$$

Ortogonalnost (pravilnost)

- Množica $S \subseteq V$ neizčlenih vektorjev je ortogonalna, če :
 $\forall x, y \in S : \langle x, y \rangle = 0$ (vektori so paroma pravilni)

- Množica $S \subseteq V$ je ortonormirana, če

$$\forall x, y \in S \quad \langle x, y \rangle = \delta_{xy} = \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

orto
vektori so paroma pravilni
in dolgi 1.

normirani

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j} \quad i=1, \dots, n$$

imenunci so vedno neizčelni

ortogonalni vektorji so li neodvisni, če jih je enako dimenziji prostora so avtomatsko baza.

$$i \neq j \quad l_i(a_j) = \left(\frac{a_j - a_j}{a_i - a_j} \right) \prod_{k \neq i, j} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = 0, \quad l_i(a_i) = \prod_{j \neq i} \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$$

$$i \neq j \quad \langle l_i, l_j \rangle = \sum_{r=1}^n l_i(a_r) l_j(a_r) = l_i(a_i) l_j(a_i) + l_i(a_j) l_j(a_j) = 0, \quad \langle l_i, l_i \rangle = l_i(a_i) l_i(a_i) = 1.$$

Trivna li se imenujejo Lagrangevi interpolacijski polinomi.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad P_f(x) = \sum_{i=1}^n f(a_i) l_i(x) \quad P_f(a_i) = f(a_i) \quad (\text{odvisno od izbire točk } a_i)$$

↓ interpolacijski polinom funkcije f

Rešita 4. je kopija rešitve 3. z nekaj konjugacijami.

5. Pokaži $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ je skalarni produkt na prostoru zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Pokaži, da so $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ ortogonalni.

$$\langle 1, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0 \quad (\text{sinus je liha funkcija + simetričen interval})$$

$$\langle \cos nx, \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \quad (\cos \text{ je sodi, sin pa liha} \rightarrow \text{produkt je lih})$$

$$\langle 1, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{n} (\sin n\pi - \sin(-n\pi)) = \frac{1}{n} (0 - 0) = 0$$

$$\langle \cos(nx), \cos((n+m)x) \rangle \text{ in } \langle \sin(nx), \cos((n+m)x) \rangle \text{ se prevede na}$$

$$z \quad \cos(nx) \cos((n+m)x) = \frac{1}{2} (\cos(-mx) + \cos(2n+m)x)$$

$$\sin(nx) \sin((n+m)x) = \frac{1}{2} (\cos(-mx) - \cos(2n+m)x)$$

Trivna

$1 \cup \{\sin nx, \cos nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ niso baza, ju pa vsako zvezno funkcijo $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ lahko zapisati kot neskončno funkcijsko vrsto $f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx + c_n \sin nx$

Več o tem funkcionalna analiza: Fourierove vrste

6. Pokaži, da je vse zvezne $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

CS neenakost

$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}$ skalarni produkt

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

enakost je dosežena, če sta x, y lin odvisna

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ je skalarni produkt!

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$