

Adjungirana preslikava - 1. del

1. Rieszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov

Ponovimo od zadnjič:

Rieszov izrek o reprezentaciji linearnih funkcionalov

Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom in naj bo ϕ linearen funkcional na V . Potem obstaja tak vektor $w \in V$, da je

$$\phi(v) = \langle v, w \rangle$$

za vsak $v \in V$. Vektor w je enolično določen.

Naj bo $v_1, \dots, v_n$ ortonormirana baza za V . Potem za vsak $v \in V$ velja

$$\phi(v) = \phi\left(\sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i\right) = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle \phi(v_i) = \left\langle v, \sum_{i=1}^n \overline{\phi(v_i)} v_i \right\rangle = \langle v, w \rangle$$

Primer

Naj bo V vektorski prostor vseh realnih polinomov stopnje ≤ 3 in naj bo $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$ skalarni produkt na V . Za linearni funkcional $\phi(p) = p(1)$ na V določi tak $r \in V$, da bo $\phi(p) = \langle p, r \rangle$ za vsak $p \in V$.

Prva rešitev: Najprej poiščemo ortonormirano bazo za V . Recimo

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, v_3 = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), v_4 = \sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)$$

Vstavimo to bazo v formulo $w = \sum_{i=1}^n \overline{\phi(v_i)}v_i$ in dobimo

$$\begin{aligned} w &= v_1(1)v_1 + v_2(1)v_2 + v_3(1)v_3 + v_4(1)v_4 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 x + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{45}{8}}\right)^2 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}\left(\sqrt{\frac{175}{8}}\right)^2 \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right) \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{15}{4}x + \frac{15}{4}x^2 + \frac{35}{4}x^3. \end{aligned}$$

Druga rešitev: Recimo, da je $r(x) = e + fx + gx^2 + hx^3$. Potem je

$$1 = \phi(1) = \langle 1, r \rangle = \int_{-1}^1 (e + fx + gx^2 + hx^3) dx = 2e + \frac{2}{3}g$$

$$1 = \phi(x) = \langle x, r \rangle = \int_{-1}^1 x(e + fx + gx^2 + hx^3) dx = \frac{2}{3}f + \frac{2}{5}h$$

$$1 = \phi(x^2) = \langle x^2, r \rangle = \int_{-1}^1 x^2(e + fx + gx^2 + hx^3) dx = \frac{2}{3}e + \frac{2}{5}g$$

$$1 = \phi(x^3) = \langle x^3, r \rangle = \int_{-1}^1 x^3(e + fx + gx^2 + hx^3) dx = \frac{2}{5}f + \frac{2}{7}h$$

Odtod dobimo $e = -\frac{3}{4}$, $g = \frac{15}{4}$ in $f = -\frac{15}{4}$, $h = \frac{35}{4}$.

Opomba: Prednost druge metode je, da nam ni treba računati ortonormirane baze, slabost pa je, da moramo rešiti sistem linearnih enačb. To metodo lahko spremenimo v alternativen dokaz Rieszovega izreka.

2. Definicija adjungirane linearne preslikave

V tem razdelku bomo delali z več vektorskimi prostori s skalarnim produktom, zato bomo pri vsakem skalarnem produktu označili iz katerega vektorskega prostora prihaja. Izbrani skalarni produkt na U bomo označili z $\langle u_1, u_2 \rangle_U$, izbrani skalarni produkt na V bomo označili z $\langle v_1, v_2 \rangle_V$, itd.

Definicija adjungirane linearne preslikave

Naj bo $L: U \rightarrow V$ linearna preslikava med dvema vektorskima prostoroma s skalarnim produktom. Pravimo, da je linearna preslikava $L^*: V \rightarrow U$ **adjungirana linearna preslikava** linearne preslikave L , če velja

$$\langle Lu, v \rangle_V = \langle u, L^*v \rangle_U$$

za vsak $u \in U$ in vsak $v \in V$.

Iz definicije še ne sledi, da L^* obstaja. Dokažimo obstoj in enoličnost v končnorazsežnem primeru.

Izrek o obstoju in enoličnosti adjungirane linearne preslikave

Vsaka linearna preslikava med končnorazsežnima vektorskima prostoroma s skalarnim produktom ima natanko eno adjungirano linearno preslikavo.

Dokaz: Recimo, da sta U in V končnorazsežna vektorska prostora s skalarnim produktom in da je $L: U \rightarrow V$ linearna preslikava.

Dokažimo najprej enoličnost: Naj bosta L^* in L' dve adjungirani linearni preslikavi linearne preslikave L . Potem za vsak $u \in U$ ter $v \in V$ velja

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle \quad \text{in} \quad \langle Lu, v \rangle = \langle u, L'v \rangle.$$

Če enačbi odštejemo, dobimo, da za vsak $u \in U$ in vsak $v \in V$ velja

$$\langle u, L^*v - L'v \rangle = \langle u, L^*v \rangle - \langle u, L'v \rangle = \langle Lu, v \rangle - \langle Lu, v \rangle = 0.$$

Če vstavimo $u = L^*v - L'v$, dobimo $\langle L^*v - L'v, L^*v - L'v \rangle = 0$, se pravi

$$L^*v - L'v = 0$$

za vsak $v \in V$. Torej je $L^* = L'$.

Dokažimo še obstoj adjungirane linearne preslikave.

Vzemimo poljuben vektor $v \in V$ in si oglejmo preslikavo

$$\phi(u) = \langle Lu, v \rangle_V,$$

ki slika iz U v skalarje. Preverimo najprej, da je ϕ linearen funkcional na U . To sledi iz $\phi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \langle L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v \rangle_V = \langle \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2, v \rangle_V = \alpha_1 \langle Lu_1, v \rangle_V + \alpha_2 \langle Lu_2, v \rangle_V = \alpha_1 \phi(u_1) + \alpha_2 \phi(u_2)$.

Po Rieszovem izreku o reprezentaciji linearnih funkcionalov obstaja natanko en vektor $w \in U$, ki zadošča $\phi(u) = \langle u, w \rangle_U$ za vsak $u \in U$. Definirajmo

$$L^*v := w.$$

Na dolgo to povemo takole: Za vsak v iz V je L^*v tak vektor iz U , da velja $\langle Lu, v \rangle_V = \langle u, L^*v \rangle_U$ za vsak $u \in U$.

S tem smo definirali preslikavo L^* iz V v U , ki zadošča

$$\langle Lu, v \rangle_V = \langle u, L^*v \rangle_U$$

za vsak $u \in U$ in vsak $v \in V$.

Preverimo moramo še, da je L^* res linearna preslikava.

Vzemimo poljubna vektorja v_1 in v_2 iz V in poljubna skalarja α_1 in α_2 . Po definiciji so L^*v_1 , L^*v_2 in $L^*(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2)$ taki vektorji iz U , da velja

$$\langle u, L^*v_1 \rangle_U = \langle Lu, v_1 \rangle_V, \quad (1)$$

$$\langle u, L^*v_2 \rangle_U = \langle Lu, v_2 \rangle_V, \quad (2)$$

$$\langle u, L^*(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2) \rangle_U = \langle Lu, \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 \rangle_V \quad (3)$$

za vsak $u \in U$. Iz (1),(2) in (3) sledi, da za vsak $u \in U$ velja

$$\begin{aligned} & \langle u, L^*(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2) - \alpha_1L^*v_1 - \alpha_2L^*v_2 \rangle_U \\ &= \langle u, L^*(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2) \rangle_U - \bar{\alpha}_1 \langle u, L^*v_1 \rangle_U - \bar{\alpha}_2 \langle u, L^*v_2 \rangle_U \\ &= \langle Lu, \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 \rangle_U - \bar{\alpha}_1 \langle Lu, v_1 \rangle_U - \bar{\alpha}_2 \langle Lu, v_2 \rangle_U \\ &= \langle Lu, \alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 \rangle_U - \langle Lu, \alpha_1v_1 \rangle_U - \langle Lu, \alpha_2v_2 \rangle_U = 0 \end{aligned}$$

Če v to enakost vstavimo $u = L^*(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2) - \alpha_1L^*v_1 - \alpha_2L^*v_2$, dobimo

$$L^*(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2) - \alpha_1L^*v_1 - \alpha_2L^*v_2 = 0$$

torej je preslikava L^* res linearna.

Primer računanja adjungirane preslikave

Naj bo $U = V$ vektorski prostor $\mathbb{C}^2$ z nestandardnim skalarnim produktom $\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = 2\alpha_1\bar{\beta}_1 + 3\alpha_2\bar{\beta}_2$. Izračunaj adjungirano linearno preslikavo linearne preslikave $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Ker je L^* linearna preslikava iz $\mathbb{C}^2$ v $\mathbb{C}^2$, je oblike

$$L^*(x, y) = (ex + fy, gx + hy).$$

Poleg tega mora veljati

$$\langle L(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1), L^*(x_2, y_2) \rangle$$

za vse $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$. Ko upoštevamo definiciji L in L^* dobimo

$$\langle (ax_1 + by_1, cx_1 + dy_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle (x_1, y_1), (ex_2 + fy_2, gx_2 + hy_2) \rangle$$

za vse $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

Ko upoštevamo še definicijo skalarnega produkta dobimo

$$2(ax_1 + by_1)\bar{x}_2 + 3(cx_1 + dy_1)\bar{y}_2 = 2x_1\overline{(ex_2 + fy_2)} + 3y_1\overline{(gx_2 + hy_2)}$$

za vse $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$. Primerjajmo istoležne koeficiente:

$$\text{koeficienti pri } x_1\bar{x}_2 : 2a = 2\bar{e}$$

$$\text{koeficienti pri } y_1\bar{x}_2 : 2b = 3\bar{g}$$

$$\text{koeficienti pri } x_1\bar{y}_2 : 3c = 2\bar{f}$$

$$\text{koeficienti pri } y_1\bar{y}_2 : 3d = 3\bar{h}$$

Odtod izrazimo e, f, g, h z a, b, c, d in vstavimo v definicijo L^* . Dobimo

$$L^*(x, y) = (\bar{a}x + \frac{3}{2}\bar{c}y, \frac{2}{3}\bar{b}x + \bar{d}y). \quad \square$$

3. Matrika adjungirane linearne preslikave

Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostora s skalarnim produktom. Zanima nas, kakšna je zveza med matriko linearne preslikave $L: U \rightarrow V$ in matriko njene adjungirane linearne preslikave $L^*: V \rightarrow U$. Odgovor je odvisen od izbire baz za U in V . V splošnem ni nobene zveze, če pa za U in V izberemo ortonormirani bazi, potem velja naslednje:

Trditev

Naj bo $\mathcal{B}$ ortonormirana baza za U in $\mathcal{C}$ ortonormirana baza za V . Naj bo $L: U \rightarrow V$ linearna preslikava in $L^*: V \rightarrow U$ njena adjungirana linearna preslikava. Potem matriko $[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ dobimo tako, da v matriki $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ vse elemente konjugiramo in dobljeno matriko še transponiramo.

Dokaz: Naj bo $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_m\}$ in $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Izračunajmo matriko $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. S pomočjo Fourierovega razvoja dobimo:

$$\begin{aligned} Lu_1 &= \langle Lu_1, v_1 \rangle_V v_1 + \dots + \langle Lu_1, v_n \rangle_V v_n \\ &\vdots \\ Lu_m &= \langle Lu_m, v_1 \rangle_V v_1 + \dots + \langle Lu_m, v_n \rangle_V v_n \end{aligned}$$

Torej je

$$[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \langle Lu_1, v_1 \rangle_V & \dots & \langle Lu_m, v_1 \rangle_V \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Lu_1, v_n \rangle_V & \dots & \langle Lu_m, v_n \rangle_V \end{bmatrix}$$

Podobno s Fourierovim razvojem dobimo

$$\begin{aligned}L^* v_1 &= \langle L^* v_1, u_1 \rangle_U u_1 + \dots + \langle L^* v_1, u_m \rangle_U u_m \\&\vdots \\L^* v_n &= \langle L^* v_n, u_1 \rangle_U u_1 + \dots + \langle L^* v_n, u_m \rangle_U u_m\end{aligned}$$

Torej je

$$[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \langle L^* v_1, u_1 \rangle_U & \dots & \langle L^* v_n, u_1 \rangle_U \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle L^* v_1, u_m \rangle_U & \dots & \langle L^* v_n, u_m \rangle_U \end{bmatrix}$$

Opazimo, da je (i, j) -ti element matrike $[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ enak

$$\langle L^* v_j, u_i \rangle_U = \overline{\langle u_i, L^* v_j \rangle_U} = \overline{\langle L u_i, v_j \rangle_V}$$

kar je enako konjugiranemu (j, i) -temu elementu matrike $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

Če torej vse elemente matrike $[L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ konjugiramo in dobljeno matriko transponiramo, dobimo ravno matriko $[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$.

Zadnji rezultat motivira naslednjo definicijo.

Definicija adjungirane matrike

Naj bo A kompleksna $m \times n$ matrika in naj bo $\bar{A}$ matrika, ki jo dobimo tako, da v matriki A konjugiramo vse elemente. Potem matriki

$$A^* := (\bar{A})^T$$

pravimo **adjungirana matrika** matrike A .

Opomba: Torej je $[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = ([L]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}})^*$, če sta $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ ortonormirani bazi.

Primer

Naj bo $U = V$ vektorski prostor $\mathbb{C}^2$ z nestandardnim skalarnim produktom $\langle (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \rangle = 2\alpha_1\bar{\beta}_1 + 3\alpha_2\bar{\beta}_2$. Izračunajmo še enkrat adjungirano linearno preslikavo linearne preslikave $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

Najprej opazimo, da je

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1)$$

ortonormirana baza glede na dani skalarni produkt. Označimo jo z $\mathcal{B}$. Določimo sedaj matriko preslikave L glede na to bazo. Velja

$$Lu_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a, c) = au_1 + c\sqrt{\frac{3}{2}}u_2$$

$$Lu_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(b, d) = b\sqrt{\frac{2}{3}}u_1 + du_2$$

Torej je

$$[L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a & b\sqrt{\frac{2}{3}} \\ c\sqrt{\frac{3}{2}} & d \end{bmatrix}$$

Odtod sledi, da je

$$[L^*]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = ([L]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}})^* = \begin{bmatrix} a & b\sqrt{\frac{2}{3}} \\ c\sqrt{\frac{3}{2}} & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{c}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \bar{b}\sqrt{\frac{2}{3}} & \bar{d} \end{bmatrix}$$

Torej je

$$\begin{aligned} L^*(x, y) &= L^*(\sqrt{2}xu_1 + \sqrt{3}yu_2) = \sqrt{2}xL^*(u_1) + \sqrt{3}yL^*(u_2) = \\ &= \sqrt{2}x(\bar{a}u_1 + \bar{b}\sqrt{\frac{2}{3}}u_2) + \sqrt{3}y(\bar{c}\sqrt{\frac{3}{2}}u_1 + \bar{d}u_2) = \\ &= (\bar{a}x + \frac{3}{2}\bar{c}y, \frac{2}{3}\bar{b}x + \bar{d}y) \end{aligned}$$

4. Lastnosti adjungiranja

Adjungiranje matrik je preslikava iz matrik v matrike, ki vsaki matriki A priredi adjungirano matriko $A^* = (\overline{A})^T$. Z direktnim računom lahko preverimo naslednje lastnosti te preslikave.

$$\textcircled{1} (\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*,$$

$$\textcircled{2} (A^*)^* = A,$$

$$\textcircled{3} (AB)^* = B^* A^*,$$

$$\textcircled{4} 0^* = 0, I^* = I.$$

Iz lastnosti (1) sledi, da je na realnih matrikah fiksne velikosti adjungiranje linearna preslikava. Na kompleksnih matrikah fiksne velikosti adjungiranje ni linearna ampak konjugirano linearna preslikava.

Dokaz: Vemo, da za konjugiranje kompleksnih števil velja

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

Odtod sledi, da za kompleksne matrike velja

$$\overline{\alpha A + \beta B} = \bar{\alpha} \bar{A} + \bar{\beta} \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \bar{B}, \quad \overline{\bar{A}} = A.$$

Upoštevajmo še lastnosti transponiranja

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^T)^T = A.$$

Odtod sledi

$$(\overline{\alpha A + \beta B})^T = (\bar{\alpha} \bar{A} + \bar{\beta} \bar{B})^T = \bar{\alpha} \bar{A}^T + \bar{\beta} \bar{B}^T,$$

$$(\overline{AB})^T = (\bar{A} \bar{B})^T = \bar{B}^T \bar{A}^T.$$

Če upoštevamo, da je $\bar{A}^T = \overline{A^T}$, potem dobimo še $\overline{\bar{A}^T}^T = A$. □

Podoben razmislek lahko naredimo tudi za adjungiranje linearnih preslikav.

Naj bosta U in V vektorska prostora s skalarnim produktom.

Označimo z $\mathcal{L}(U, V)$ množico vseh linearnih preslikav iz U v V . To množico lahko spremenimo v vektorski prostor, če za linearni preslikavi L_1, L_2 in skalarja α_1, α_2 definiramo linearno preslikavo $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$ s predpisom $(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(u) = \alpha_1 L_1(u) + \alpha_2 L_2(u)$.

Adjungiranje je preslikava $\mathcal{L}(U, V)$ v $\mathcal{L}(V, U)$. Preverimo, da zadošča

$$(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)^* = \bar{\alpha}_1 L_1^* + \bar{\alpha}_2 L_2^*. \quad (1)$$

Za vsaka $u \in U$ in $v \in V$ velja $\langle u, (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)^*(v) \rangle =$
 $= \langle (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)(u), v \rangle = \langle \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u, v \rangle =$
 $= \alpha_1 \langle L_1 u, v \rangle + \alpha_2 \langle L_2 u, v \rangle = \alpha_1 \langle u, L_1^* v \rangle + \alpha_2 \langle u, L_2^* v \rangle =$
 $= \langle u, \bar{\alpha}_1 L_1^* v + \bar{\alpha}_2 L_2^* v \rangle = \langle u, (\bar{\alpha}_1 L_1^* + \bar{\alpha}_2 L_2^*)(v) \rangle.$

Če upoštevamo enoličnost adjungirane preslikave, odtod sledi (1).

Lastnost (1) bi lahko dokazali tudi s prehodom na matrike.

Lastnost

$$(L^*)^* = L \quad (2)$$

dokažemo tako, da preverimo, da sta L in $(L^*)^*$ adjungirani linearni preslikavi linearne preslikave L^* . Za vsaka $u \in U$ in $v \in V$ velja $\langle v, (L^*)^* u \rangle = \langle L^* v, u \rangle = \overline{\langle u, L^* v \rangle} = \overline{\langle Lu, v \rangle} = \langle v, Lu \rangle$. Lastnost

$$(L_2 L_1)^* = L_1^* L_2^* \quad (3)$$

dokažemo tako, da preverimo, da sta $(L_2 L_1)^*$ in $L_1^* L_2^*$ adjungirani linearni preslikavi linearne preslikave $L_2 L_1$. Recimo, da L_1 slika iz U v V , L_2 pa iz V v W . Za vsak $u \in U$ in vsak $w \in W$ velja naslednji račun $\langle u, (L_2 L_1)^* w \rangle_U = \langle L_2 L_1 u, w \rangle_W = \langle L_1 u, L_2^* w \rangle_V = \langle u, L_1^* L_2^* w \rangle_U$.

Seveda bi tudi lastnosti (2) in (3) lahko dokazali s preходом na matrike.