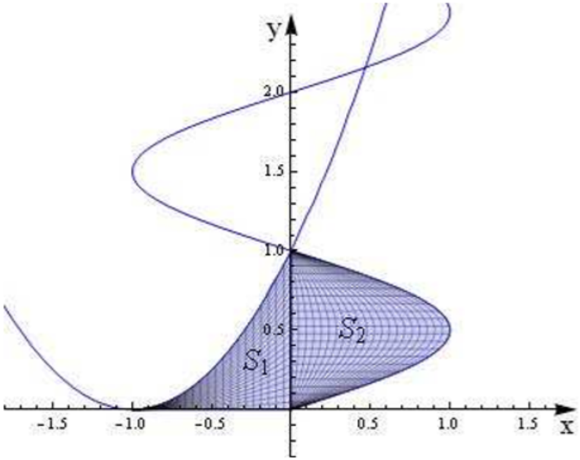
Uporaba določenega integrala

Uros KUZMAN

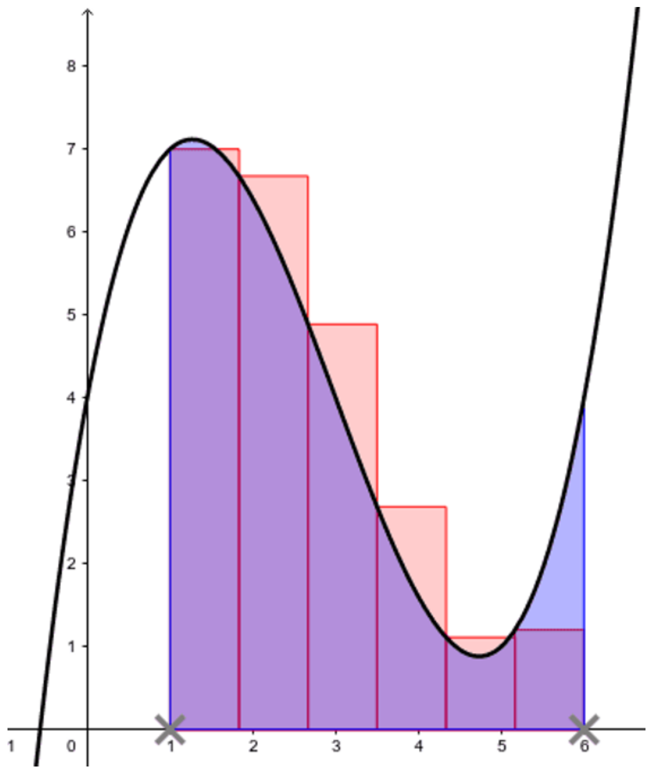
Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = (x+1)^2$, $x = \sin(\pi y)$ in $y = 0$.



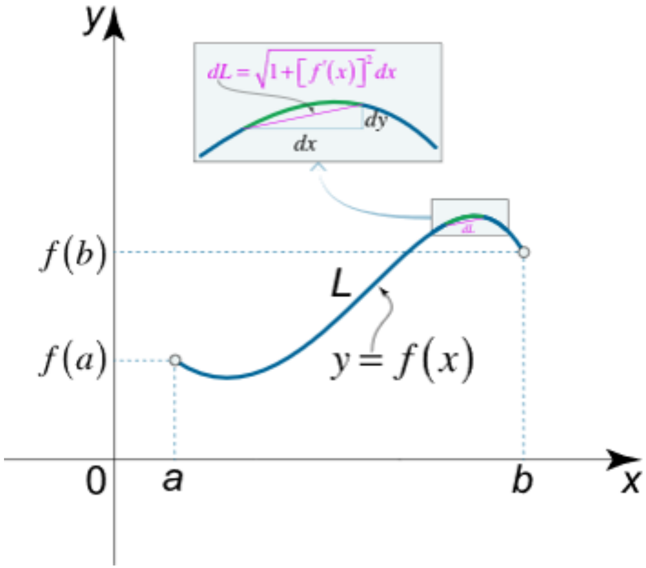
$$S = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 dx + \int_0^1 \sin(\pi y) dy = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{\cos(\pi y)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}.$$

KLJUČNA IDEJA: Določeni integral sešteje kontinuum mnogo infinitezimalnih linearnih aproksimacij.

Primer: $S \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i)dx_i \Longrightarrow S = \int_a^b f(x)dx.$



KAKO NA TAK NAČIN IZRAČUNAMO DOLŽINO KRIVULJE?



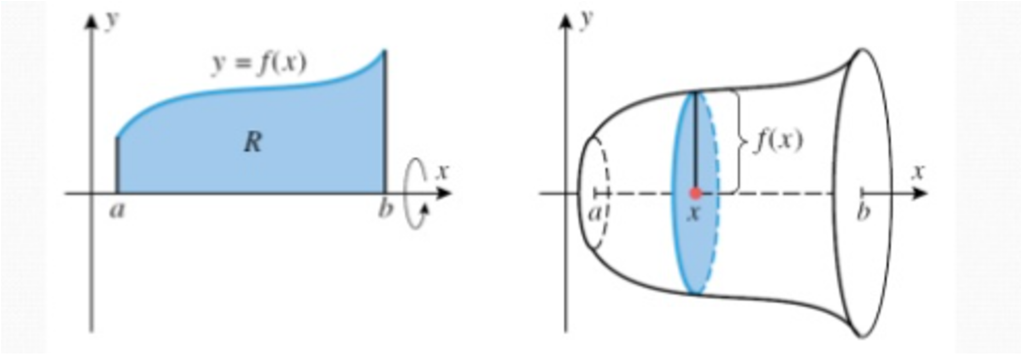
Ocenimo majhen odsek krivulje z odsekom tangente

$$dL \cong \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (f'(x)dx)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ko seštejemo vse te 'neskončno majhne' delčke, dobimo

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

KAKO IZRAČUNAMO VOLUMEN VRTENINE?



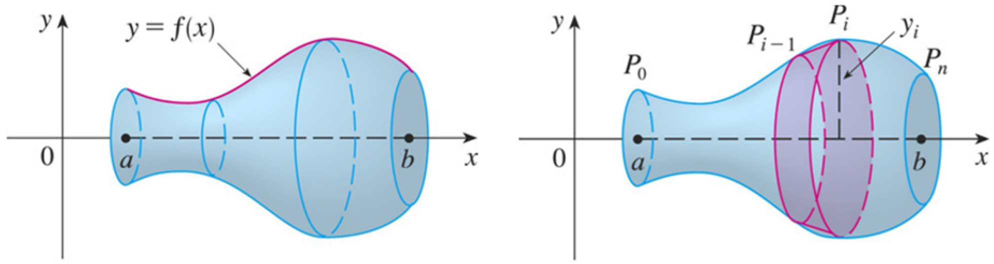
Ocenimo volumen majhnega kosa kot da gre za zelo tanek valj

$$dV \cong \pi r^2 h = \pi f(x)^2 dx.$$

Ko seštejemo vse te 'neskončno majhne' volumne, dobimo

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

KAKO IZRAČUNAMO POVRŠINO VRTENINE?



Površino majhnega kosa bomo ocenili kot da gre za prisekan stožec. Spomnimo, da je

$$pl = \pi(r + R)s \overset{R \approx r}{\rightarrow} 2\pi r s$$

$$dP \cong 2\pi r s = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x)^2)}dx.$$

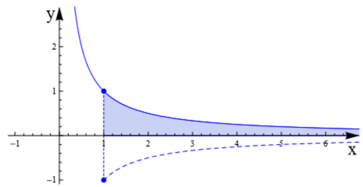
Ko seštejemo vse te 'neskončno majhne' volumne, dobimo

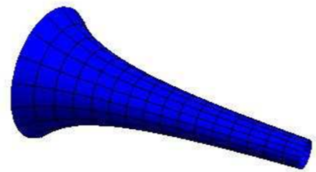
$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x)^2)}dx.$$

Primer: Če obstajata, izračunaj volumen in površino vrtenine, ki jo dobimo, če funkcijo

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \in [1, \infty)$$

zavrtimo okoli abscisne osi.





Najprej izračunajmo volumen

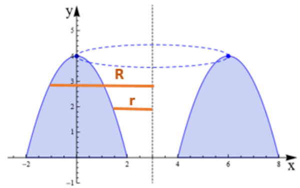
$$V = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi[-x^{-1}]_1^\infty = \pi.$$

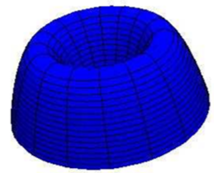
Nato si oglejmo še izraz za površino

$$P = 2\pi \int_1^\infty f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx.$$

Slednji integral ima singularnost pri $x = \infty$. Tam se obnaša kot $\frac{1}{x}$ in ni konvergenten.

Lik L omejujeta parabola $y = 4 - x^2$ in abscisna os. Izpelji ustrezno integracijsko formulo in izračunaj volumen telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika L okoli osi $x = 3$.





Telo bomo 'razrezali' v navpični smeri. In sicer, na prizme z višino dy katerih osnovna ploskev je kolobar z radijema R in r. Potrebujemo torej oba radija v odvisnosti od spremenljivke $y \in [0, 4]$:

$$y = 4 - x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4 - y}$$

$$R = 3 + \sqrt{4 - y},\ r = 3 - \sqrt{4 - y}.$$

Infinitezimalni del volumna torej ocenimo z

$$dV = \pi(R^2 - r^2)h = \pi\left((3 + \sqrt{4 - y})^2 - (3 - \sqrt{4 - y})^2\right) dy.$$

$$V = \pi \int_0^4 12\sqrt{4 - y}dy = 64\pi.$$

PARAMETRIČNE KRIVULJE

Ob predpostavki, da se po krivulji premikamo v pozitivni smeri, družina zveznic med točkami $(x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$ in koordinatnim izhodiščem opiše lik s pliščino

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.$$

Če je krivulja sklenjena velja tudi

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x\dot{y} dt = - \int_{\alpha}^{\beta} y\dot{x} dt.$$

Dolžina krivulje pa je vedno enaka

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

KRIVULJE V POLARNIH KOORDINATAH

Družina zveznic med točkami $(x(\varphi), y(\varphi)), \varphi \in [\alpha, \beta]$ in koordinatnim izhodiščem opiše lik s ploščino

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

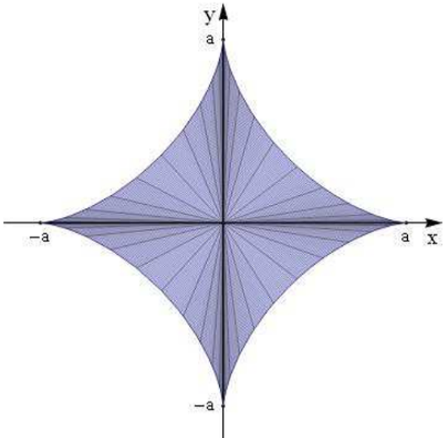
Dolžina krivulje je enaka

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi.$$

Primer: Izračunaj obseg in ploščino asteroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0.$$

Namig: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.



Izračunajmo oba odvoda

$$\dot{x} = -3a\cos^2 t \sin t,\ \ \dot{y} = 3a\sin^2 t \cos t.$$

Ker je krivulja sklenjena lahko vzamemo

$$S = \int_0^{2\pi} x\dot{y}dt = 3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t dt,$$

vendar pa je integracija precej zapletena.

Zato vzamemo raje

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\dot{y} - y\dot{x} dt = 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t dt$$

$$= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t) dt.$$

To sedaj integriramo s pomočjo dvojnih kotov

$$S = \frac{3}{4} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3\pi}{8} a^2.$$

Pri izračunu obsega postopamo podobno

$$ob = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt.$$

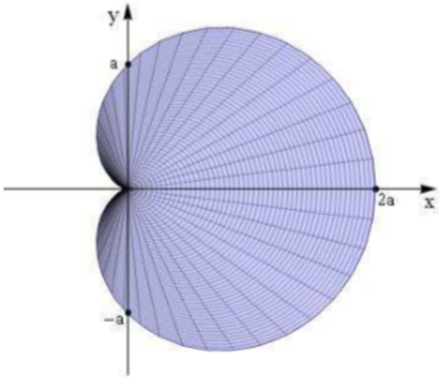
Tokrat dobimo

$$ob = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = \left[-3a \cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a.$$

Primer: Izračunaj obseg in ploščino kardioide, ki je podana z

$$r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi), a > 0, r \in [0, 2\pi].$$

Izračunaj tudi površino telesa, ki jo dobimo,če kardioido zavrtimo okoli osi x.



Ploščina je enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}(2\pi+0+\pi).$$

Obseg je enak

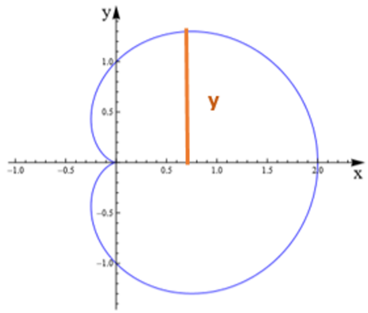
$$ob = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$$

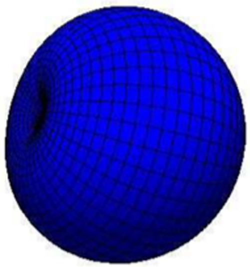
$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi} d\varphi.$$

Sedaj znova uporabimo znano formulo

$$ob = a \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}} d\varphi = \ldots = 8a.$$

Če za $a = 1$ kardioido zavrtimo okoli osi x dobimo naslednje telo





Površino majhnega dela ocenimo s plaščem prisekanega stožca

$$dP = 2\pi Rs = \pi y(\varphi)dL(\varphi) = \pi r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}.$$

Dobimo integral

$$P = 2\pi\int_0^\pi r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}d\varphi.$$

Domača naloga: Izračunaj ga.