

# Adjungirana preslikava - 2. del

## 5. Jedro in slika adjungirane preslikave

Recimo, da poznamo jedro in sliko linearne preslikave  $L: U \rightarrow V$ . Radi bi odtod dobili jedro in sliko adjungirane linearne preslikave  $L^*: V \rightarrow U$ . Spomnimo se, da velja  $\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle$  za vsak  $u \in U$  in vsak  $v \in V$ .

### Izrek

Za vsako linearno preslikavo  $L: U \rightarrow V$ , kjer sta  $U$  in  $V$  končnorazsežna vektorska prostora s skalarnim produktom, velja

$$\text{Ker } L^* = (\text{Im } L)^\perp. \quad (1)$$

Dokaz: Vzemimo poljuben vektor  $v \in V$ . Opazimo, da velja  $L^*v = 0$  natanko tedaj, ko je  $\langle u, L^*v \rangle = 0$  za vsak  $u \in U$ . Po definiciji  $L^*$  velja to natanko tedaj, ko je  $\langle Lu, v \rangle = 0$  za vsak  $u \in U$ . Po definiciji  $\text{Im } L$  velja to natanko tedaj, ko je  $\langle w, v \rangle = 0$  za vsak  $w \in \text{Im } L$ . Po definiciji ortogonalnega komplementa velja to natanko tedaj, ko  $v \in (\text{Im } L)^\perp$ .  $\square$

Oglejmo si nekaj preprostih posledic formule (1).

Če na obeh straneh (1) uporabimo ortogonalni komplement in upoštevamo, da je  $((\operatorname{Im} L)^\perp)^\perp = \operatorname{Im} L$ , dobimo

$$\operatorname{Im} L = (\operatorname{Ker} L^*)^\perp. \quad (2)$$

Če v formuli (1) zamenjamo  $L$  z  $L^*$ , dobimo

$$\operatorname{Ker} L = (\operatorname{Im} L^*)^\perp. \quad (3)$$

Če v formuli (2) zamenjamo  $L$  z  $L^*$ , dobimo

$$\operatorname{Im} L^* = (\operatorname{Ker} L)^\perp. \quad (4)$$

Isto formulo dobimo, če na obeh straneh v (3) uporabimo ortogonalni komplement.

Pokažimo sedaj, da formule (1)-(4) veljajo tudi za matrike.

Najprej standardni skalarni produkt zapišemo v matrični obliki

$$\langle v, w \rangle = v_1 \bar{w}_1 + \dots + v_n \bar{w}_n = \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \dots & \bar{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = w^* v. \quad (5)$$

Naj bo  $A$  kompleksna  $m \times n$  matrika. Opazimo, da iz (5) sledi

$$\langle Au, v \rangle = v^* Au = v^* A^* u = (A^* v)^* u = \langle u, A^* v \rangle \quad (6)$$

za vsak  $u \in \mathbb{C}^n$  in vsak  $v \in \mathbb{C}^m$ . V  $\langle Au, v \rangle$  nastopa standardni skalarni produkt na  $\mathbb{C}^m$ , v  $\langle u, A^* v \rangle$  pa standardni skalarni produkt na  $\mathbb{C}^n$ . Naj bo  $L_A$  linearna preslikava iz  $\mathbb{C}^n$  v  $\mathbb{C}^m$  definirana z  $L_A u = Au$ . Potem velja

$$(L_A)^* = L_{A^*} \quad (7)$$

saj po (6) velja  $\langle u, (L_A)^* v \rangle = \langle L_A u, v \rangle = \langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle = \langle u, L_{A^*} v \rangle$  za vsak  $u \in \mathbb{C}^n$  in vsak  $v \in \mathbb{C}^m$ . Iz (7) sledi recimo verzija (3) za matrike

$$\text{Ker } A = \text{Ker } L_A = (\text{Im } (L_A)^*)^\perp = (\text{Im } L_{A^*})^\perp = (\text{Im } A^*)^\perp.$$

Če je  $L$  slika iz  $U \rightarrow V$ , potem  $L^*L$  slika iz  $U \rightarrow U$ ,  $LL^*$  pa iz  $V \rightarrow V$ . Poleg tega iz lastnosti adjungiranja sledi

$$(L^*L)^* = L^*L \quad \text{in} \quad (LL^*)^* = LL^*. \quad (5)$$

Oglejmo si, kako izračunamo jedro in sliko preslikav  $L^*L$  in  $LL^*$ .

### Trditev

Za vsako linearno preslikavo  $L: U \rightarrow V$ , kjer sta  $U$  in  $V$  končnorazsežna vektorska prostora s skalarnim produktom, velja

$$\text{Ker } L^*L = \text{Ker } L. \quad (6)$$

Dokaz: Vzemimo poljuben  $u \in U$ . Če  $u \in \text{Ker } L$ , potem je  $Lu = 0$ . Odtod sledi  $L^*Lu = L^*0 = 0$ , torej  $u \in \text{Ker } L^*L$ .

Dokažimo še obratno. Če  $u \in \text{Ker } L^*L$ , potem  $L^*Lu = 0$ . Po definiciji  $L^*$  je  $\langle Lu, Lu \rangle = \langle u, L^*Lu \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$ . Odtod sledi  $Lu = 0$ , torej je  $u \in \text{Ker } L$ .

Oglejmo si nekaj posledic formule (6).

Če na obeh straneh formule (6) vzamemo ortogonalni komplement in upoštevamo, da po formuli (4) velja  $\text{Im } L^* = (\text{Ker } L)^\perp$  in  $\text{Im } L^* L = \text{Im } (L^* L)^* = (\text{Ker } L^* L)^\perp$ , potem dobimo

$$\text{Im } L^* L = \text{Im } L^*. \quad (7)$$

Če v formulah (6) in (7) zamenjamo  $L$  z  $L^*$ , potem dobimo

$$\text{Ker } LL^* = \text{Ker } L^*, \quad (8)$$

$$\text{Im } LL^* = \text{Im } L. \quad (9)$$

Opomba: Pravimo, da je  $L: V \rightarrow V$  **normalna** linearna preslikava, če velja  $LL^* = L^*L$ . Za normalne linearne preslikave iz (6) in (8) sledi, da je  $\text{Ker } L^* = \text{Ker } L$ , iz (7) in (9) pa sledi, da je  $\text{Im } L^* = \text{Im } L$ .

## 6. Lastne vrednosti adjungirane matrike

Recimo, da je  $A$  kompleksna  $n \times n$  matrika. Zanima nas, kakšna je zveza med lastnimi vrednostmi matrike  $A$  in lastnimi vrednostmi matrike  $A^*$ .

### Izrek o lastnih vrednostih adjungirane matrike

Naj bo  $A$  kvadratna matrika nad  $\mathbb{C}$  in naj bo  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Potem je  $\lambda$  lastna vrednost za  $A$  natanko tedaj, ko je  $\bar{\lambda}$  lastna vrednost za  $A^*$ .

Dokaz: Radi bi dokazali, da velja  $\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$  natanko tedaj, ko velja  $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda} I) \neq \{0\}$ . Zadošča dokazati, da velja

$$\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = \dim \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda} I). \quad (1)$$

Označimo  $B = A - \lambda I$ . Iz lastnosti operacije adjungiranja sledi, da je  $B^* = A^* - \bar{\lambda}I$ . Torej zadošča dokazati, da je

$$\dim \operatorname{Ker} B = \dim \operatorname{Ker} B^*. \quad (2)$$

Iz izreka  $\operatorname{Ker} B^* = (\operatorname{Im} B)^\perp$  sledi

$$\dim \operatorname{Ker} B^* = \dim (\operatorname{Im} B)^\perp \quad (3)$$

Po izreku o ortogonalnem razcepu, je

$$\dim (\operatorname{Im} B)^\perp = n - \dim \operatorname{Im} B \quad (4)$$

kjer je  $n$  velikost matrike  $A$ . Po osnovnem izreku je

$$n - \dim \operatorname{Im} B = \dim \operatorname{Ker} B. \quad (5)$$

Iz formul (3), (4) in (5) sledi formula (2). □

Oglejmo si še en dokaz, ki je bolj računski.

Najprej opazimo, da za vsako kompleksno kvadratno matriko  $B$  velja

$$\det B^* = \det(\overline{B})^T = \det \overline{B} = \overline{\det B}.$$

Če vstavimo  $B = A - xI$ , dobimo

$$\det(A^* - \bar{x}I) = \overline{\det(A - xI)},$$

torej za karakteristična polinoma  $A$  in  $A^*$  velja

$$p_{A^*}(\bar{x}) = \overline{p_A(x)}.$$

Torej je  $p_A(x) = 0$  natanko tedaj, ko je  $p_{A^*}(\bar{x}) = 0$ , kar dokaže izrek. □

Opomba: Iz tega dokaza je razvidno, kako se  $p_{A^*}(x)$  izraža z  $p_A(x)$ .

Iz  $p_A(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  namreč sledi, da velja

$$p_{A^*}(x) = \overline{p_A(\bar{x})} = \overline{c_0 + c_1\bar{x} + \dots + c_n\bar{x}^n} = \bar{c}_0 + \bar{c}_1x + \dots + \bar{c}_nx^n.$$

## Primer

Določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

in njene adjungirane matrike  $A^*$ .

Rešitev: Karakteristični polinom matrike  $A$  je

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 - 2i = (1 - \lambda)^2 - (1 + i)^2 = (\lambda + i)(\lambda - 2 - i)$$

torej sta  $-i$  in  $2 + i$  lastni vrednosti matrike  $A$ . Podobno je

$$\det(A^* - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 + 2i = (1 - \lambda)^2 - (1 - i)^2 = (\lambda - i)(\lambda - 2 + i)$$

karakteristični polinom matrike  $A^*$ . Torej sta  $i$  in  $2 - i$  lastni vrednosti matrike  $A^*$ . Torej so lastne vrednosti za  $A^*$  res konjugirane lastnim vrednostim za  $A$ .

Lastna podprostora za  $A$  sta

$$\text{Ker}(A + iI) = \text{Lin} \begin{bmatrix} 1 - i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{Ker}(A - (2 + i)I) = \text{Lin} \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lastna podprostora za  $A^*$  pa sta

$$\text{Ker}(A^* - iI) = \text{Lin} \begin{bmatrix} 1 - i \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{Ker}(A^* - (2 - i)I) = \text{Lin} \begin{bmatrix} 1 - i \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Odtod je razvidno, da  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  in  $\text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$  nista nujno enaka.

Opomba: Pokazali bomo, da za normalne matrike vedno velja  $\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$ . Gornji primer kaže, da to v splošnem ni res. Vemo pa, da vedno velja  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = \dim \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I)$ .

## 7. Simetrične in hermitske matrike

Oglejmo si pomemben razred linearnih preslikav.

### Definicija sebiadjungirane preslikave

Naj bo  $V$  končnorazsežen vektorski prostor s skalarnim produktom. Linearna preslikava  $L: V \rightarrow V$  je **sebiadjungirana**, če velja  $L = L^*$ .

Opomba: Če je  $A$  matrika sebiadjungirane preslikave  $L: V \rightarrow V$  glede na ortonormirano bazo  $\mathcal{B}$  za  $V$ , potem je  $A^* = ([L]_{\mathcal{B}})^* = [L^*]_{\mathcal{B}} = [L]_{\mathcal{B}} = A$ . Taki matriki včasih pravimo **sebiadjungirana** matrika, vendar se pogosteje uporablja naslednja terminologija:

### Definicija simetrične in hermitske matrike

Kompleksna matrika  $A$  je **hermitska**, če zadošča  $A = A^*$ . Realnim hermitskim matrikam pravimo tudi **simetrične** matrike.

Opomba: Za vsako matriko  $A$  sta  $A^*A$  in  $AA^*$  hermitski matriki. Vsaka potenca hermitske matrike je spet hermitska matrika.

## Primer: Ortogonalni projektorji

Naj bo  $V$  vektorski prostor s skalarnim produktom,  $W$  podprostor v  $V$  in  $L: V \rightarrow V$  taka linearna preslikava, ki vsakemu vektorju iz  $V$  priredi njegovo ortogonalno projekcijo na  $W$ . Pokažimo, da je  $L = L^*$  in  $L = L^2$ .

Dokaz: Naj bo  $w_1, \dots, w_k$  ortonormirana baza za  $W$ . Potem za vsak  $v \in V$  velja  $Lv = \sum_{i=1}^k \langle v, w_i \rangle w_i$ . Za vsak  $v' \in V$  velja

$$\langle Lv, v' \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \langle v, w_i \rangle w_i, v' \right\rangle = \sum_{i=1}^k \langle v, w_i \rangle \langle w_i, v' \rangle,$$

$$\langle v, Lv' \rangle = \left\langle v, \sum_{i=1}^k \langle v', w_i \rangle w_i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \overline{\langle v', w_i \rangle} \langle v, w_i \rangle.$$

Torej je za vsaka  $v, v' \in V$  velja  $\langle Lv, v' \rangle = \langle v, Lv' \rangle$  kar pomeni  $L = L^*$ . Ker je  $Lw_i = w_i$  za vsak  $i$ , je

$$L^2v = \sum_{i=1}^k \langle v, w_i \rangle Lw_i = \sum_{i=1}^k \langle v, w_i \rangle w_i = Lv.$$

Kaj lahko povemo o lastnih vrednostih hermitskih matrik?

### Trditev 1

Vse lastne vrednosti hermitske matrike so realne.

Dokaz: Naj bo  $\lambda$  lastna vrednost hermitske matrike in naj bo  $v$  pripadajoči lastni vektor. Potem za standardni skalarni produkt velja

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, A^* v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

Ker je  $v \neq 0$ , lahko pokrajšamo  $\langle v, v \rangle$  in dobimo  $\lambda = \bar{\lambda}$ . □

Kaj lahko povemo o lastnih vektorjih hermitskih matrik?

### Trditev 2

Lastna vektorja hermitske matrike, ki pripadata različnim lastnim vrednostim, sta ortogonalna glede na standardni skalarni produkt.

Dokaz: Naj bo  $A$  hermitska matrika in naj bosta  $u$  in  $v$  njena lastna vektorja. Naj bosta  $\lambda$  in  $\mu$  pripadajoči lastni vrednosti, se pravi

$$Au = \lambda u \quad \text{in} \quad Av = \mu v.$$

Po prejšnji trditvi sta  $\lambda$  in  $\mu$  realni števili. Odtod sledi

$$\langle Au, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad (1)$$

$$\langle u, Av \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \bar{\mu} \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle \quad (2)$$

Ker je  $A$  hermitska matrika, velja

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle = \langle u, Av \rangle \quad (3)$$

Iz (1), (2) in (3) sledi

$$\lambda \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle \quad (4)$$

Če je  $\lambda \neq \mu$ , iz (4) sledi, da je

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Kaj lahko povemo o Jordanski formi hermitske matrike?

### Trditev 3

Vsaka hermitska matrika je podobna diagonalni matriki.

Dokaz. Zadošča dokazati, da se korenski podprostori ujemajo z lastnimi podprostori. Odtod namreč sledi, da so vse Jordanske kletke velikosti 1.

Naj bo  $\lambda$  lastna vrednost hermitske matrike  $A$ . Radi bi dokazali, da za vsako naravno število  $m$  velja  $\text{Ker}(A - \lambda I)^m = \text{Ker}(A - \lambda I)$ .

Označimo  $B = A - \lambda I$  in opazimo, da je tudi matrika  $B$  hermitska.

Iz formule  $\text{Ker } B^* B = \text{Ker } B$  torej sledi, da je  $\text{Ker } B^2 = \text{Ker } B$ .

Če namesto  $B$  vstavimo  $B^{2^k}$  za  $k = 1, \dots, m-1$ , dobimo

$$\text{Ker } B^{2^m} = \text{Ker } B^{2^{m-1}} = \text{Ker } B^{2^{m-2}} = \dots = \text{Ker } B.$$

$\text{Ker}$  je  $2^m \geq m$  za vsak  $m$ , odtod sledi

$$\text{Ker } B \subseteq \text{Ker } B^m \subseteq \text{Ker } B^{2^m} = \text{Ker } B$$

Torej res za vsak  $m$  velja

$$\text{Ker } B^m = \text{Ker } B.$$

## Definicija unitarne in ortogonalne matrike

Kompleksna  $n \times n$  matrika je **unitarna**, če njeni stolpci tvorijo orthonomirano bazo za  $\mathbb{C}^n$  glede na standardni skalarni produkt.

Realni unitarni matriki pravimo tudi **ortogonalna** matrika.

Opomba: Za unitarno matriko  $P$  velja  $PP^* = I$ . Za ortogonalno matriko  $P$  velja  $PP^T = I$ . V obeh primerih je torej  $P^{-1} = P^*$ .

## Izrek

Za vsako hermitsko matriko  $A$  obstaja taka unitarna matrika  $P$  in taka realna diagonalna matrika  $D$ , da velja  $A = PDP^{-1}$ .

Za vsako simetrično matriko  $A$  obstaja taka ortogonalna matrika  $P$  in taka realna diagonalna matrika  $D$ , da velja  $A = PDP^{-1}$ .

Dokaz prvega dela: Naj bo  $A$  hermitska  $n \times n$  matrika. Za vsak lastni podprostor matrike  $A$  izberimo ortonormirano bazo. Naj bo  $\mathcal{B}$  unija izbranih ortonormiranih baz po vseh lastnih podprostorih matrike  $A$ . Ker so lastni podprostorji matrike  $A$  paroma ortogonalni (po Trditvi 2), je  $\mathcal{B}$  ortogonalna množica. Ker je  $\mathbb{C}^n$  direktna vsota lastnih podprostorov matrike  $A$  (po Trditvi 3), je  $\mathcal{B}$  ogrodje za  $\mathbb{C}^n$ . Torej je  $\mathcal{B}$  ortonormirana baza za  $\mathbb{C}^n$ . Sestavljena je iz lastnih vektorjev matrike  $A$ .

Naj bo  $P$  matrika, katere stolpci so elementi baze  $\mathcal{B}$ . Potem je  $P$  unitarna matrika, katere stolpci so lastni vektorji matrike  $A$ , torej je

$$\begin{aligned} AP &= A \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & \dots & Av_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \quad \square \end{aligned}$$

Dokaz drugega dela. Naj bo  $A$  simetrična matrika. Naj bodo  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  vse paroma različne lastne vrednosti matrike  $A$ . Ker so matrike  $A - \lambda_i I$  realne (po Trditvi 1), lahko za lastni podprostor  $\text{Ker}(A - \lambda_i I)$  izberemo ortonormirano bazo  $\mathcal{B}_i$  iz realnih vektorjev. (Gram-Schmidtova ortogonalizacija nam realno bazo spremeni v realno ortogonalno bazo.) Ker so lastni podprostori matrike  $A$  paroma ortogonalni in ker je njihova vsota enaka  $\mathbb{C}^n$  je  $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$  ortonormirana baza za  $\mathbb{C}^n$ . Elemente te baze vzamemo za stolpce matrike  $P$ . □

Še en dokaz drugega dela: Dokažimo s popolno indukcijo, da ima  $\mathbb{R}^n$  ortonormirano bazo iz lastnih vektorjev matrike  $A$ . Recimo, da je  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$  ortonormirana množica v  $\mathbb{R}^n$  iz lastnih vektorjev  $A$ . Trdimo, da za vsak  $w \in \mathcal{B}^\perp$  velja  $Aw \in \mathcal{B}^\perp$ . Za vsak  $v \in \mathcal{B}$  je namreč  $\langle Aw, v \rangle = \langle w, Av \rangle = \langle w, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle w, v \rangle = 0$ . Ker je  $\mathcal{B}^\perp$  invarianten za  $A$ , vsebuje vsaj en realen lastni vektor za  $A$ . Če ta lastni vektor normiramo, dobimo tak vektor  $v_{r+1}$ , da je  $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$  ortonormirana množica v  $\mathbb{R}^n$  iz lastnih vektorjev matrike  $A$ . □

## Primer

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Poišči tako ortogonalno matriko  $P$  in tako diagonalno matriko  $D$ , da je

$$A = PDP^{-1}.$$

Karakteristični polinom matrike  $A$  je

$$\det(A - xI) = -x^3 + 7x^2 - 12x = -x(x - 3)(x - 4)$$

Lastni vektorji, ki pripadajo lastnim vrednostim 4, 3, 0 so

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Očitno so to vektorji paroma ortogonalni. Če jih normiramo, dobimo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Iskana matrika  $P$  je torej

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

iskana matrika  $D$  pa je

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$