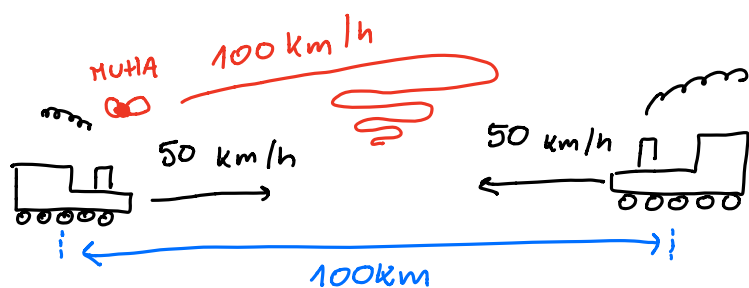


ŠTEVILSKÉ VRSTE

NALOGA ZA MOTIVACIJO:



DVA VLAKA STA NA RAZDALJI 100 km,
TER S HITROSTJO 50 km/h VOZITA
DRUG PROTI DRUGEMU.

MED NJIMA LETA MUHA S HITROSTJO
100 km/h. KO PRISPE DO VLAKA,
SE OBRNE IN GRE PROTI DRUGEMU.

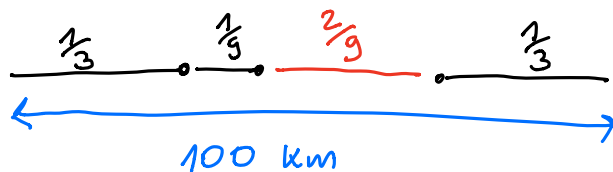
KAKŠNO POT OPRAVI MUHA DO SREČANJA OBEH VLAKOV?

① DIREKTEN IZRAČUN:

KER MUHA LETA 2X HITREJE KOT VOZI VLAK, SE Z
VLAKOM IZ NASPROTNE STRANI SREČA NA $\frac{2}{3}$ RAZDALJE.



MED TEM ČASOM JE TUDI PRVI VLAK PREVOZIL $\frac{1}{3}$ POTI,
ZATO STA MUHA IN VLAK SEDAJ NA $\frac{1}{3}$ RAZDALJE.
ZNOVA VLAK OPRAVI $\frac{1}{3}$ TE POTI, MUHA PA $\frac{2}{3}$.



SKUPNA DOLŽINA POTI JE TOREJ ENAKA:

$$s = \frac{2}{3} \cdot 100 \text{ km} + \frac{2}{9} \cdot 100 \text{ km} + \frac{2}{27} \cdot 100 \text{ km} + \dots$$

$$s = \frac{200 \text{ km}}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right)$$

② KRAJŠI RAČUN: KER VLAKA VOZITA S HITROSTJO 50 km/h, SE
BOSTA SREČALA PO 1h. MUHA VES TA ČAS LETA S HITROSTJO
100 km/h, BO V TEM ČASU PRELETELA 100 km.

MORALA: $\frac{200 \text{ km}}{3} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \right) = 100 \text{ km} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{3}{2}$

V TEM PODGLAVJU SE BOMO TOREJ UKVARJALI Z NESKONČNIMI VSOTAMI REALNIH ŠTEVIL, KI JIM PRAVIMO VRSTE. NATANENEJE, DEFINIRALI JIH BOMO KOT:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{DELNA VRSTA}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{VSOTA VRSTE}$$

KADAR TA LIMITA OBSTAJA, PRAVIMO DA VRSTA KONVERGIRA, SICER PA DIVERGIRA.

② OBRAVNAVAJ KONVERGENCO NASLEDNJIH VRST:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}, \quad k \geq 0. \quad (\text{NAMIG: PARCIALNI ULOMKI}).$$

(a) OGLEDJMO SI DELNE VSOTE:

$$S_1 = -1, \quad S_2 = -1 + 1 = 0, \quad S_3 = -1 + 1 - 1 = -1,$$

$$S_4 = 0, \quad S_5 = -1, \quad S_6 = 0, \dots$$

$$S_{2k+1} = -1 \quad S_{2k} = 0$$

SKLEP: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ NE OBSTAJA, KER IMAMO DVE STEKALIŠČI

t.j. VRSTA JE DIVERGENTNA.

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_1 = \ln 2, \quad S_2 = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) = \ln 3,$$

$$S_3 = S_2 + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \ln\left(3 \cdot \frac{4}{3}\right) = \ln 4 \dots$$

⋮

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{VRSTA DIVERGIRA}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$$

SPOMNI MO: ZAPOREDJU $1, q, q^2, q^3, \dots$ PRAVIMO GEOMETRIJSKO,
NJEJOVA DELNA VSOTA PA JE ENAKA:

$$1 - q^n = (1 - q) \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})}_{S_n}$$

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & |q| < 1 \\ \text{NE OBST.}, & |q| \geq 1 \end{cases}$$

SKLEP: GEOMETRIJSKA VRSTA JE KONVERGENTNA NATANKO ZA $|q| < 1$.

NAG PRIMER!

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} &= \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \dots = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot 3 = \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}, \quad k \geq 0$$

UPORABEVAJMO NAMIK:

$$\frac{A}{n+k} + \frac{B}{n+k+1} = \frac{An + Ak + A + Bn + Bk}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{(A+B)n + Ak + A + Bk}{(n+k)(n+k+1)}$$

$$n: A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$1: Ak + A + Bk = 1 \Rightarrow \boxed{A=1} \quad \boxed{B=-1}$$

$$\frac{1}{(n+k)(n+k+1)} = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}$$

IMAMO TOREJ VSDOTO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) = \frac{1}{1+k} - \cancel{\frac{1}{2+k}} + \cancel{\frac{1}{2+k}} - \cancel{\frac{1}{3+k}} + \cancel{\frac{1}{3+k}} - \dots = \frac{1}{1+k}$$

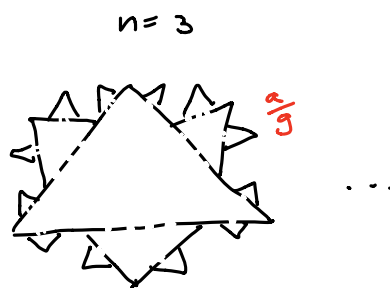
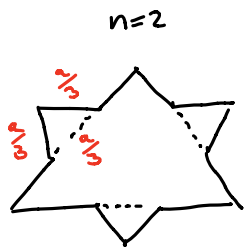
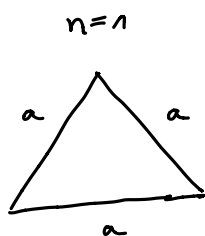
BOLJ NATANĚNO:

$$S_n = \frac{1}{1+k} - \cancel{\frac{1}{2+k}} + \cancel{\frac{1}{2+k}} - \dots + \cancel{\frac{1}{n+k}} - \frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{1+k} - \frac{1}{n+k+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{n+k+1} \right) = \frac{1}{1+k}.$$

KOMENTAR: TEJ VRSTI REČENO TELESKOPSKA!

(3) KOCHOVA SNEŽINKA JE LIK, KI GA DOBIMO V LIMITI NASLEDNJEGA PROCESA: $a > 0$.



ČE OBSTAJATA, IZRAČUNAJ NJUNA PLOŠČINO IN OBSEGA.

REŠITEV:

OGLEDIMO SI 'DELNO VSDOTO' OBSEGA:

$$ob_1 = 3a$$

$$ob_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{a}{3}$$

$$ob_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{a}{9}$$

:

$$ob_n = 3 \cdot 4^{n-1} \frac{a}{3^{n-1}} = 3a \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

STRANICA JE VBELEJ ZA $\frac{1}{3}$ KRAJŠA
ŠTEVILO STRANIC PA SE MNOŽI Z 4.

TO ZAPOREDJE DIVERGIRA
t.j. OBSEG NE OBSTAJA

PODOBNO OBRAVNAVAMO PLOŠČINO:

$$S_1 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = S_1 + 3 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_3 = S_2 + 3 \cdot 4 \left(\frac{a}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

⋮

$$S_n = S_{n-1} + 3 \cdot 4^{n-2} \left(\frac{a}{3^{n-1}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Iz prvega v drugi korak
dodamo 3 trikotnike
s stranico $\frac{1}{3}$, nato
pa na vsako obstoječo
stranico dodamo 4
trikotnike s stranico

$$\frac{a}{3^{n-1}}, n \geq 2.$$

DOBIMO:

$$S = S_1 + \frac{S_1}{3} + \frac{S_1 \cdot 4}{27} + \frac{S_1 \cdot 16}{243} + \dots =$$

$$= S_1 + \frac{S_1}{3} \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots\right) = S_1 + \frac{S_1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} =$$

$$= S_1 + \frac{S_1}{3} \cdot \frac{9}{5} = S_1 \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{8}{5} S_1 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$$

- ④ MRAVLJICA SE S HITROSTJO 1cm/s PREMIKA PO ELASTIČNI VRVI, KI JE NA ZAČETKU DOLGA 1m, VSAKO SEKUNDO PA SE RAZTEGNE (ENAKOMERNO) ZA EN DODATEN METER. ALI MRAVLJICA KDAJ DOSEŽE KONEC VRVI? KAJ PA, ČE SE DOLŽINA VRVI VSAKO SEKUNDO PODVOJI?

REŠITEV: INTUITIVNO BI ČLOVEK REKEL, DA JE ODGOVOR 'NE', Vendar pa je potrebno upoštevati, da se razteguje tudi prehojena pot mravlje.



1m

ZAČETEK

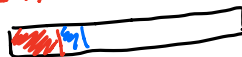
1cm



1m

PO 1 SEKUNDI

2cm 1cm



2m

PO 2 SEKUNDATI

3cm 3/2cm 1cm



3m

PO TREH SEKUNDATI

DELEŽ PREHOJNE POTI:

$$D = 1\% + \frac{1}{2}\% + \frac{1}{3}\% + \dots = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) \%$$

KLJUČNO VIRŠANJE: ALI TA VSOTA PRESEŽE 100%?

ODGOVOR: DA.

DOKAZ:

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad \text{TA VRSTA JE OŽITNO KONVERGENTNA.} \end{aligned}$$

KAKO SE RAČUN SPREMEMI, ČE SE DOLŽINA PODVOJI?

$$D = 1\% + \frac{1}{2}\% + \frac{1}{4}\% + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n \% = 2\%$$

V TEM PRIMERU PRAVLJICA PREHODI LE 2% VRVI.

KOMENTAR:

{ VRSTI $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ PRAVILNO HARMONIČNA IN JE POSEBNI PRIMER VRSTE, PRI KATERI Gredo ČLENI PROTI NIČ, A VRSTA NI KONVERGENTNA.

KOMENTAR:

{ V SPLOŠNEM VELJA:
~ ČE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ KONVERGIRA, JE $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
~ OBRATNO NI RES, NPR. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ IN $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
(KLJUČNO JE 'KAKO HITRO' Gredo ČLENI K NIČ).