

KONVERGENČNI KRITERIJI ZA VRSTE S POZITIVNI MI ČLENI

ŽE ZADNJIČ SMO POVEDALI, DA JE VSOTO VRSTE MOGOČE
IZRAČUNATI ZGOLJ V IZJEMNIH PRIMERIH, ZATO SE
BOMO V TEM POGlavJU OSREDOTOČILI ZGOLJ NA
VPRAŠANJE KONVERGENCE VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, PRI
ČEMER PREDPOSTAVIMO, DA JE $a_n \geq 0$. ← KLJUČNO

IDEJA JE PREDSTAVITI RAZLIČNE KRITERIJE, S KATERIMI
LAHKO UČOTUVIŠ, ALI JE DANA VRSTA KONVERGENTNA ALI NE.

PRIMERJALNI KRITERIJ:

{ DENIMO, DA VELJA $0 \leq a_n \leq b_n$ ZA $n \geq n_0$.
TEDAJ STA MOŽNA DVA SKLEPA:
(1) ČE JE $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ DIVERGENTNA, JE TAKA TUDI $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
(2) ČE JE $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ KONVERGENTNA, JE TAKA TUDI $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

KORISTNI DEJSTVI:

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ KONV. ZA $p > 1$ IN DIV. ZA $0 < p \leq 1$.

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$ KONV. ZA $q > 1$ IN DIV. ZA $0 < q \leq 1$.

NALOGA: OBRAVNAVAJ KONVERGENCO NASLEDNJIH VRST.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \quad 2 > 0$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$

REŠITEV:

(a) ZA VELIKE $n \in \mathbb{N}$ SE KVOCIENT $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ OBNAŠA KOT $\frac{1}{n^{3/2}}$. TOREJ SUMIMO, DA JE VRSTA KONVERGENTNA IN JO BOMO OMEJITI NAVZGOR Z NEKO KONVERGENTNO VRSTO:

$$n\sqrt{n+1} \geq n\sqrt{n} = n^{3/2} \quad \text{ZA } n \geq 1$$

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{ZA } n \geq 1$$

SKLEP: KER JE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ KONV., JE TAKA TUDI $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$$

ZA VELIKE $n \in \mathbb{N}$ SE ČLENI VRSTE OBNAŠAJO KOT $\frac{1}{n}$, ZATO SUMIMO, DA JE DIVERGENTNA. TOREJ JO BOMO SKUŠALI OCENITI NAVZDOL Z DIVERGENTNO VRSTO:

$$\left. \begin{array}{l} n+1 \geq n \\ n^2+3n \leq n^2+3n^2 = 4n^2 \end{array} \right\} \frac{n+1}{n^2+3n} \geq \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$$

SKLEP: KER JE VRSTA $4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGENTNA, JE TAKA TUDI VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n}$.

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

OČITNO: ČE JE $q \leq 1$, VRSTA DIVERGIRA, KER ČLENI NE GREDO PROTI NIČ.

ZA $q > 1$ SUMIMO, DA VRSTA KONVERGIRA SAJ JE ČLEN q^n 'MOČNEJŠI' OD POLINOMA n^2 .

Torej bomo skušali člene oceniti navzgor s členi neke konvergentne vrste.

PROBLEM: NE MOREMO VZETI $n^2 \leq 2^n$ ZA NEK $n_2 \in \mathbb{N}$ IN $n \geq n_2$, KER DOBIMO $\frac{n^2}{2^n} \leq 1$ IN NAM TO V SMISLU KONVERGENCE NE KORISTI.

REŠITEV: $n^2 \leq \left(\frac{2}{2}\right)^n$ ZA NEK $n_2 \in \mathbb{N}$ IN $n \geq n_2$.

Torej velja:

$$\frac{n^2}{2^n} \leq \frac{\left(\frac{2}{2}\right)^n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

KER JE VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ KONV., JE TAKA TUDI $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

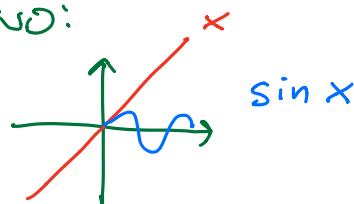
$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$$

OČITNO: $2^n \rightarrow \infty$ IN $\sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \rightarrow 0$, KO $n \rightarrow \infty$.

KLJUČNO VPRAŠANJE JE, ALI GRE SINUS DOVOLJ HITRO PROTI NIČI, DA IZNIE 2^n IN ZAČOTOVI KONVERGENCO.

ODGOVOR JE 'DA', UPORABIMO PA OCENO:

$$\sin x \leq x \text{ ZA } x \geq 0$$



$$\text{SKLEP: } 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

KER GEOMETRIJSKA VRSTA S ČLENI $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ KONV., KONVERGIRA TUDI NAŠA VRSTA.

KOMENTAR

V ZGORNJIH PRIMERIH VIDIMO, DA JE ZA UPORABO PRIMERJALNEGA KRITERIJA KLJUČNA 'INTUICIJA' + J. MORAMO SE PRAVILNO ODLOČITI, ALI DOKAZUJEMO KONV. ALI DIV., SICER OCENO IŠČEMO V NAPAČNI SMERI.

KORENSKI IN KVOCIENTNI KRITERIJ

NAJ BODO $a_n \geq 0$. OBRAVNAVAMO KONVERGENCO $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ČE OBSTAJATA, DEFINIRAMO:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

TEDAJ VELJAJO NASLEDNJI SKLEPI:

(i) ČE JE $D < 1$ ALI $C < 1$ VRSTA KONVERGIRA.

(ii) ČE JE $D > 1$ ALI $C > 1$ VRSTA DIVERGIRA.

(iii) ČE JE $D = 1$ ALI $C = 1$ KRITERIJ ODPOVE
t.j. NE MOREMO IZ TEH LIMIT SKLEPATI NA KONVERGENCO
ALI DIVERGENCO VRSTE.

NALOGA: S POMOČJO KRITERIJEV OBRAVNAVAJ KONVERGENCO VRST.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

REŠITEV:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

KVOCIENTNI KRITERIJ:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

KER JE $D < 1$, VRSTA KONVERGIRA.

KORENSKI KRITERIJ: ČE SE SPOMNIMO, DA JE $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$,

LAHKO IZRAČUNAMO TUDI:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = 0 < 1$$

DOBIMO ISTI SKLEP.

$$(b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$$

TOKRAT UPORABIMO KORENSKI KRITERIJ.

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

KER JE $C < 1$, VRSTA KONVERGIRA.

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

UPORABIMO OBA KRITERIJA:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1) \cdot \frac{1}{-(n+1)} n} =$$

$$= e \cdot e^{-1} = 1$$

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 1$$

V TEM PRIMERU OBA KRITERIJA ODPOVETA, VEDAR
PA LAHKO OPAZIMO, DA VELJA:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0.$$

TOREJ JE VRSTA DIVERGENTNA ŽE ZGOLJ ZARADI
DEJSTVA, DA ČLENI NE GREDO PROTI NIČ.

DEJSTVO:

{ OBA KRITERIJA, KVOCIENTNI IN KORENSKI, IZVIRATA IZ PRIMERJAVE Z GEOMETRIJSKO VRSTO. ZATO BODISI DATA OBA ODGOVOR (ČE ZNAMO IZRAČUNATI LIMITO) BODISI OBA HKRATI ODPOVEA. T.j. ČE EDEK OD NJIJU ODPOVE, SE 'NE SPLAČA' PREIZKUŠATI DRUGEGA.

NALOHA: V ODVISNOSTI OD $a > 0$ OBRAVNAVAJ KONVERGENCO.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n$$

REŠITEV:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

$$\text{KORENSKI KRITERIJ: } C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0 < 1.$$

VRSTA KONVERGIRA ZA VSE $a > 0$.

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$$

$$\text{KVOCIENTNI KRITERIJ: } D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)^s} \frac{n^s}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = a.$$

• ČE $a < 1$: VRSTA KONVERGIRA.

• ČE $a > 1$: VRSTA DIVERGIRA.

• ČE $a = 1$: KRITERIJ ODPOVE, VENDAR IMAMO TAKRAT OPRAVKA Z VRSTO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ T.j. ČE $s > 1$ KONVERGIRA, ČE $s \leq 1$ PA DIVERGIRA.

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}$$

KVOCIENTNI KRITERIJ:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{a^{n+1} (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(an)^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{a} e^{-1} = \frac{1}{ae}$$

- Če $a > \frac{1}{e}$, je $\frac{1}{ae} < 1$ in vrsta konvergira.
- Če $a < \frac{1}{e}$, je $\frac{1}{ae} > 1$ in vrsta divergira.
- Če $a = \frac{1}{e}$, imamo opravlka z vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$.

ZANJO VEMO, DA JE $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow 1$.

KER PA JE ZAPOREDJE $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ STR. NARAŠČAJOČE, LAHKO

SKLEPAMO, DA JE $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. OD TOD SLEDI, DA

JE $a_{n+1} > a_n$ OZ. DA ČLENI NARAŠČAJO IN NE
GREDO PROTI NIČ. ZATO JE VRSTA DIVERGENTNA.

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n a^n$$

KORENSKI KRITERIJ: $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \sqrt[n]{n} = a$.

- Če $a < 1$: vrsta konvergira.
- Če $a > 1$: vrsta divergira.
- Če $a = 1$, imamo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} n$, ki divergira.

RAABEJEV KRITERIJ:

KADAR KORENSKI IN KVOCIENTNI KRITERIJ ODPOVEČA, LAHKO UPORABIMO MOŽNEJŠI, RAABEJEV KRITERIJ.

ČE OBSTAJA, DEFINIRAMO:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

TEDAJ VELJA:

- če $R > 1$, vrsta konvergira.
- če $R < 1$, vrsta divergira.
- če $R = 1$, kriterij odpove.

NALOGA: OBRAVNAVAJ KONVERGenco VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! (2n+1)}.$

REŠITEV: POSKUSIMO NAJPREJ S KVOCIENTNIM KRITERIJEM.

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!! (2n+3)} \cdot \frac{(2n)!! (2n+1)}{(2n-1)!!} = \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1}{(2n+2) \cdot (2n) \cdot \dots \cdot 2 \cdot (2n+3)} \cdot \frac{(2n)(2n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot (2n+1)}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1} = \\ &= \frac{(2n+1) \cdot (2n+1)}{(2n+2) \cdot (2n+3)} = \frac{4n^2 + 4n + 1}{4n^2 + 10n + 6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{KRITERIJ ODPOVE.} \end{aligned}$$

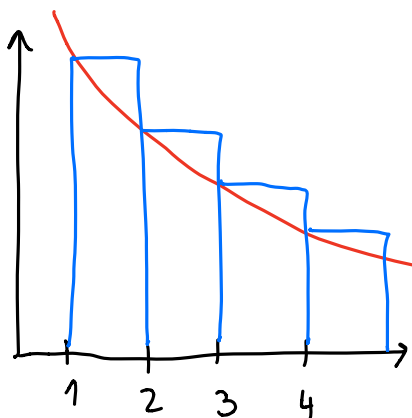
UPORABIMO RAABEJEV KRITERIJ:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{4n^2 + 10n + 6}{4n^2 + 4n + 1} - 1 \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{6n + 5}{4n^2 + 4n + 1} \right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1 \quad \text{VRSTA KONVERGIRA.} \end{aligned}$$

INTEGRALSKI KRITERIJ:

{ NAJ BO $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ZVEZNA, POZITIVNA IN MONOTONO
PADAJOČA FUNKCIJA. VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ KONVERGIRA
NATANKO TEDAJ, KO KONVERGIRA INTEGRAL $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

ZAKAJ?



$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ JE RIEMANNOVA

VSOTA ZA DELNE
TOČKE $x_j \in \mathbb{N}$ IN $\xi_j = x_{j-1}$.

NALOŽA: OBRAVNAVAJ KONVERGENCO VRSTE $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 a}$, $a > 0$.

REŠITEV: VZEMIMO $f(x) = e^{-x^2 a}$. OGLEDNO SI INTEGRAL

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{e^{x^2 a}}$. TRDIMO, DA VEDNO KONVERGIRA, SAJ GRE
 e^{x^2} ZELO HITRO PROTI NESKONČNOSTI. DA TO
UTEMELJIMO UPORABIMO KRITERIJ ZA INTEGRAL:

$$\frac{1}{e^{x^2 a}} = \frac{\frac{x^2}{e^{x^2 a}}}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2 a}} = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t = \sqrt{x}}} \frac{t^4}{e^{t^2 a}} = 0$$

4x UPORABIMO
L'HOSPITALOVO PRAVILO

KER JE $L=0$ IN $\alpha=2>1$, INTEGRAL KONVERGIRA.