Problem lastnih vrednosti

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; (x, λ), $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ in $\lambda \in \mathbb{C}$

je <u>lastni par</u> za A, če je

$$Ax = \lambda x.$$

λ je lastna vrednost; x je lastni vektor.

y je <u>levi lastni vektor</u>, če je

$$y^H A = \lambda y^H.$$

Dovolj je obravnavati samo desne l. vektorje.

<u>Lema</u>: Levi in desni lastni vektorji matrike A, ki pripadajo različnim l. vrednostim, so ortogonalni.

Kako računati λ?

Iskanje preko ničel karakterističnega

polinoma $\det(A - \lambda I)$ numerično

ni dober pristop.

Uporabljamo različne stabilne algoritme

za računanje lastnih vrednosti in

vektorjev! Izbor algoritma je odvisen

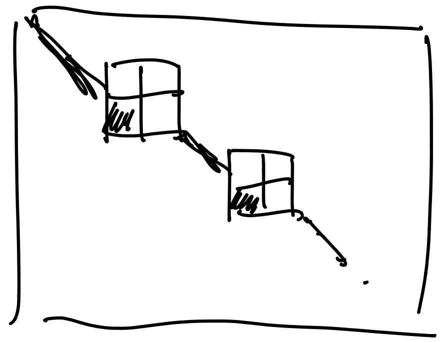
od tega, kaj želimo izračunati!

- Ali je matrika majhna in polna, ali velika in razpršena?
- Ali je matrika simetrična?
- Ali potrebujemo vse lastne vrednosti?
- Ali potrebujemo tudi l. vektorje?

Izrek: Za vsako matriko A obstajata unitarna matrika U in zgornja trikotna matrika T, da je

$$U^H A U = T \quad (\text{Schurova forma}).$$

Izrek: Za vsako realno matriko A obstajata ortogonalna matrika Q in kvazi zgornja trikotna matrika T, da je $Q^T A Q = T$.

$T =$ 

Potenčna metoda

Algoritem:

- izberemo normiran vektor $z_0 \in \mathbb{R}^n$
- $y_{k+1} = A z_k$, $\quad z_{k+1} = \frac{1}{\|y_{k+1}\|} y_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$

Izrek: Naj bo λ_1 dominantna lastna vrednost A, torej

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Če ima z_0 neničelno komponento v smeri lastnega vektorja, ki pripada

λ_1, potem zaporedje vektorjev z_k po smeri konvergira k lastnemu vektorju, ki pripada λ_1.

Ideja dokaza, ko ima A n lin. neod. lastnih vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_n$:

$$z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad ; \quad \alpha_1 \neq 0$$

$$A z_0 = A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i v_i \implies$$

$$\boxed{A^k z_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k v_i}$$

$$\frac{A^k z_0}{\|A^k z_0\|} = \frac{\sum_i \alpha_i \lambda_i^k v_i}{|\lambda_1^k| \, \|\sum_i \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i\|}$$

$$= \frac{\lambda_1^k \sum_i \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i}{|\lambda_1^k| \, \|\sum_i \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i\|} \xrightarrow{k \to \infty} \beta \cdot v_1$$

Metodo lahko privedimo za primera:

- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$; $\lambda_1 = -\lambda_2$
- $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$; $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

Kako končati iteracijo?

$$\|z_{k+1} - z_k\| \leq \varepsilon \quad (\text{ni dobro})$$

Izkaže se, da je pravi kriterij
<u>Rayleighov kvocient</u>:

$$\rho(x, A) = \frac{x^H A x}{x^H x}$$

Če je (x, λ) lastni par, je

$$\rho(x, A) = \frac{x^H A x}{x^H x} = \frac{x^H \lambda x}{x^H x} = \lambda$$

Zaustavitveni pogoj je

$$\|A z_k - \rho_k z_k\| \leq \varepsilon,$$

kjer je $\rho_k = \rho(z_k, A)$.

Hitrost konvergence: linearna.
Odvisna je od razmerja $|\lambda_2|/|\lambda_1|$.

Ko poiščemo dominantno l. vrednost λ_1, lahko problem reduciramo na iskanje naslednjih l. vrednosti.

Redukcija v primeru $A=A^T$ (Hotellingova redukcija):

Kaj želimo? Iščemo matriko B, ki ima enake l. vrednosti kot A, razen λ_1, ki pa gre v 0.

$$A : |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

$$B : |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq 0$$

$\boxed{B = A - \lambda_1 x_1 x_1^T}$, kjer je (λ_1, x_1) lastni par, ki pripada A in $\|x_1\|_2 = 1$.

Naj bo λ_i, $i=2,3,\dots,n$, lastna vrednost matrike A in x_i pripadajoči l. vektor.

$$Bx_i = (A - \lambda_1 x_1 x_1^T) x_i$$

$$= Ax_i - \lambda_1 x_1 (x_1^T x_i)$$

$$= \lambda_i x_i - \lambda_1 x_1 \cdot 0 = \lambda_i x_i \Rightarrow$$

(λ_i, x_i) lastni par za B.

$$Bx_1 = (A - \lambda_1 x_1 x_1^T) x_1 = Ax_1 - \lambda_1 x_1 (x_1^T x_1)$$

$$= \lambda_1 x_1 - \lambda_1 x_1 \cdot 1 = 0 \cdot x_1 \Rightarrow$$

$(0, x_1)$ lastni par.

<u>Householderjeva redukcija</u> za splošno matriko.

- Poiščemo ortogonalno matriko Q:
  $Qx_1 = k e_1$ (Householder) (x_1, λ_1) dominantni lastni par

- Matrika $B = QAQ^T$ ima obliko

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{bmatrix},$$

lastne vrednosti matrike C pa se ujemajo s preostalimi lastnimi vrednostmi B.