

1. Vemo, da je $GL(\mathbb{R}, 2)$ grupa (z operacijo množenja matrik). Ali je

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}; \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

podgrupa grupe $GL(\mathbb{R}, 2)$?

2. V grupi S_7 poišči,

- (a) red elementa $(1\ 2\ 3\ 4)$.
- (b) red elementa $(1\ 2\ 3)(5\ 7)$.
- (c) element, ki je reda 12.
- (d) center grupe.

3. Poiščite najmanjšo podgrupo grupe permutacij S_4 , ki vsebuje permutaciji $(1\ 2)(3\ 4)$ in $(1\ 4)$.

4.

- Naj v grupi G velja $a^6 = b^3 = e$ in $a^5b^2 = b^2a^5$, za neka elementa a, b v G . Dokaži, da a in b komutirata.
- Naj bo G grupa, v kateri je vsak element enak svojemu inverzu. Pokažite, da je potem G abelova grupa.

5. Naj bo $G = (\mathbb{Z}_n, +)$ grupa in $x \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq 0$. Koliko je red elementa x ? Kakšna je moč najmanjše podgrupe v G , ki vsebuje x ? Naj bo $y \in \mathbb{Z}_n$, $y \neq 0$ in naj $\gcd(x, y)$ deli n . Kakšna je moč najmanjše podgrupe v G , ki vsebuje x in y ?

6. Naj bo $M = (\mathbb{Z}_n, \cdot)$ monoid. Označimo z $\mathbb{Z}_n^*$ množico vseh obrnljivih elementov v M . Dokaži, da je $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ grupa. Koliko elementov ima $\mathbb{Z}_n^*$?

7. Koliko elementov ima grupa $(\mathbb{Z}_{81}^*, \cdot)$? Ali je 17 element $\mathbb{Z}_{81}^*$? Če je, izračunajte njegov inverz.

8. Koliko elementov ima grupa $(\mathbb{Z}_{72}^*, \cdot)$? Ali je 53 element $\mathbb{Z}_{72}^*$? Če je, izračunajte njegov inverz.

9. Pokažite, da je $GL(\mathbb{Z}_3, 2)$ grupa (z operacijo množenja matrik po modulu 3); v grupi so torej vse obrnljive matrike velikosti 2×2 s koeficienti iz $\mathbb{Z}_3$. Poišči kak element reda 2 in reda 3 v $GL(\mathbb{Z}_3, 2)$. Poišči center $Z(GL(\mathbb{Z}_3, 2))$.

Dodatne naloge

10. Naj bo G grupa in $a \in G$. Pokažite, da je red elementa a^{-1} enak redu elementa a .

11. Na množici $\{a, b, c, d\}$ so definirane operacije $*_1, *_2, *_3$ in $*_4$, ki so podane s Cayleyevo tabelo. Katera od teh struktur je grupa?

$*_1$	a	b	c	d	$*_2$	a	b	c	d	$*_3$	a	b	c	d	$*_4$	a	b	c	d
a	a	c	d	a	a	a	b	c	d	a	a	b	c	d	a	a	b	c	d
b	b	b	c	d	b	b	c	d	a	b	b	a	d	c	b	b	a	c	d
c	c	d	a	b	c	c	d	a	b	c	c	d	a	b	c	c	b	a	d
d	d	a	b	c	d	d	a	b	c	d	d	c	b	a	d	d	d	b	c

12. Označimo s K, L, M množico konstantnih funkcij, množico lihih funkcij in množico strogo monotonih funkcij, ki slikajo iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$. V te množice vpeljemo operacijo komponiranja funkcij. Kakšne strukture dobimo?

13. Naj bo G grupa s sodim številom elementov. Pokažite, da v G obstaja element reda dva.