Singularni razcep - 1. del

1. Pozitivno semidefinitne matrike

Te matrike bomo potrebovali pri konstrukciji singularnega razcepa.

Definicija pozitivno semidefinitne in pozitivno definitne matrike

Matrika A je **pozitivno semidefinitna**, če je sebiadjungirana in če velja $\langle Av, v\rangle \geq 0$ za vsak vektor v. Matrika A je **pozitivno definitna**, če je sebiadjungirana in če velja $\langle Av, v\rangle > 0$ za vsak neničeln vektor v.

Oznake: Če je matrika A pozitivno semidefinitna pišemo $A \geq 0$.
Če je matrika A pozitivno definitna, pišemo $A > 0$.

Opomba: V obeh definicijah uporabljamo standardni skalarni produkt, ki je definiran z $\langle u, v\rangle = v^* u$. Torej je $\langle Av, v\rangle = v^* Av$.

Opomba: Pozitivno definitne matrike so poseben primer pozitivno semidefinitnih matrik. Te pa so poseben primer sebiadjungiranih matrik.

Opomba: Lahko bi definirali tudi pojem pozitivno (semi)definitne linearne preslikave iz V v V, kjer je V vektorski prostor s skalarnim produktom.

Oglejmo si nekaj lastnosti pozitivno semidefinitnih matrik.

Izrek (Karakterizacije pozitivno semidefinitnih matrik)

Za kompleksno matriko A so ekvivalentne naslednje trditve:

1. A je pozitivno semidefinitna.
2. A je sebiadjungirana in vse njene lastne vrednosti so ≥ 0.
3. Obstaja taka unitarna matrika P in taka diagonalna matrika D, ki ima vse elemente realne in ≥ 0, da velja $A = PDP^{-1}$.
4. Obstaja taka sebiadjungirana matrika B, da velja $A = B^2$.
5. Obstaja taka matrika B (ne nujno kvadratna), da velja $A = B^*B$.

Dokaz. Če velja (1), potem za vsako lastno vrednost λ matrike A in za vsak pripadajoči lastni vektor v velja $\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle \geq 0$. Ker je $v \neq 0$, odtod sledi $\lambda \geq 0$. Torej velja (2).

Vemo, da se da vsako sebiadjungirano matriko A izraziti kot $A = PDP^{-1}$, kjer je P unitarna matrika in D realna diagonalna matrika, ki ima po diagonali lastne vrednosti matrike A. Torej iz (2) sledi (3).

Če velja (3), lahko diagonalne elemente matrike D korenimo. Torej obstaja taka realna diagonalna matrika E, da je $D = E^2$. Definirajmo matriko $B := PEP^{-1}$. Ker je matrika P unitarna, je matrika B sebiadjungirana in velja $B^2 = (PEP^{-1})^2 = PE^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Torej velja (4).

Očitno iz (4) sledi (5). Če velja (5), potem je $A^* = (B^*B)^* = B^*B = A$. Poleg tega je $\langle B^*Bv, v\rangle = \langle Bv, Bv\rangle \geq 0$ za vsak v. Torej velja (1). $\square$

Sedaj lahko definiramo osnovni pojem, ki nastopa v singularnem razcepu.

Definicija singularne vrednosti matrike

Naj bo B kompleksna $m \times n$ matrika in σ nenegativno realno število. Pravimo, da je σ **singularna vrednost** matrike B, če je σ^2 lastna vrednost $n \times n$ matrike B^*B.

Opomba. Po izreku so vse lastne vrednosti matrike $A = B^*B$ realne in ≥ 0. Njihovi kvadratni koreni so ravno singularne vrednosti matrike B. Če so stolpci B linearno neodvisni, potem 0 ni lastna vrednost matrike B^*B (sledi iz $\mathrm{Ker}\, B^*B = \mathrm{Ker}\, B = \{0\}$) torej so vse singularne vrednosti > 0.

Pozitivno definitna verzija izreka

Za kompleksno matriko A so ekvivalentne trditve:

1. A je pozitivno definitna.
2. A je sebiadjungirana in vse njene lastne vrednosti so > 0.
3. $A = PDP^{-1}$ za unitarno matriko P in diagonalno matriko $D > 0$.
4. $A = B^2$ za obrnljivo sebiadjungirano matriko B.
5. $A = B^*B$ za matriko B z linearno neodvisnimi stolpci.

Realna verzija izreka

Za vsako realno matriko A so ekvivalentne trditve:

1. A je pozitivno semidefinitna.
2. A je simetrična in vse njene lastne vrednosti so ≥ 0.
3. $A = PDP^{-1}$ za ortogonalno matriko P in diagonalno matriko $D \geq 0$.
4. $A = B^2$ za simetrično matriko B.
5. $A = B^T B$ za realno matriko B, ki ni nujno kvadratna.

Opomba: Pogosto se zastavi vprašanje ali že iz pogoja $\langle Av, v\rangle \geq 0$ za vsak v sledi, da je A pozitivno semidefinitna. V realnem primeru je odgovor ne, v kompleksnem primeru pa je odgovor da.

Prvi del dokaza: Če je A neničelna realna matrika, ki zadošča $A^T = -A$, potem A ni sebiadjungirana, vendar velja $\langle Av, v\rangle = 0$ za vsak realen v. Velja namreč $v^T Av = (v^T Av)^T = v^T A^T v = -v^T Av$, torej je $v^T Av = 0$.

Drugi del dokaza. Pokažimo, da je kompleksna $n \times n$ matrika A sebiadjungirana natanko tedaj, ko velja $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$ za vsak $v \in \mathbb{C}^n$.
Za $B := A - A^*$ velja $\langle Bv, v\rangle = \langle Av, v\rangle - \langle A^* v, v\rangle = \langle Av, v\rangle - \overline{\langle Av, v\rangle}$. Torej je $\langle Av, v\rangle \in \mathbb{R}$ natanko tedaj, ko je $\langle Bv, v\rangle = 0$. Če je $\langle Bv, v\rangle = 0$ za vsak v, potem vstavimo $v = u + u'$ in dobimo $\langle Bu, u'\rangle + \langle Bu', u\rangle = 0$ za vsaka u, u'. (Ker je $\langle Bu, u\rangle = \langle Bu', u'\rangle = 0$.) Če namesto u vstavimo iu, dobimo $i\langle Bu, u'\rangle - i\langle Bu', u\rangle = 0$ za vsaka u, u'. Če to enačbo delimo z i in jo prištejemo k gornji enačbi, dobimo $\langle Bu, u'\rangle = 0$ za vsaka u, u'. Če vstavimo $u' = Bu$, dobimo $Bu = 0$ za vsak u. Torej je $B = 0$.

2. Klasifikacija skalarnih produktov

V tem razdelku bomo opisali vse skalarne produkte na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$.

Standardni skalarni produkt je definiran z $\langle u, v \rangle = v^* u$. Na dolgo

$$\left\langle \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \right\rangle = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{\beta}_n = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 & \ldots & \bar{\beta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Vsak drug skalarni produkt bomo označili z $[u, v]$.

Trditev

Če je A kompleksna pozitivno definitna $n \times n$ matrika, potem je z

$$[u, v] := \langle Au, v \rangle$$

definiran skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$. Če je A realna pozitivno definitna $n \times n$ matrika, potem nam ista formula da skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

Dokaz: Preverimo, da $[u, v]$ zadošča vsem trem lastnostim iz definicije skalarnega produkta.

Ker je A pozitivno definitna matrika, velja $\langle Au, u\rangle > 0$ za vsak neničeln vektor u. Torej velja $[u, u] > 0$ za vsak neničeln vektor u.

Ker je $A = A^*$, velja za vsak u in vsak v

$$[v, u] = \langle Av, u\rangle = \langle v, A^* u\rangle = \langle v, Au\rangle = \overline{\langle Au, v\rangle} = \overline{[u, v]}$$

To je ravno konjugirana simetričnost.

Preverimo še linearnost v prvem faktorju. Velja

$$[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v] = \langle A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle = \langle \alpha_1 Au_1 + \alpha_2 Au_2, v\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle Au_1, v\rangle + \alpha_2\langle Au_2, v\rangle = \alpha_1[u_1, v] + \alpha_2[u_2, v]$$

za vektorje u_1, u_2, v in skalarja α_1, α_2. $\square$

Pokažimo še, da smo na ta način dobili vse skalarne produkte na $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{C}^n$.

Trditev

Za vsak skalarni produkt $[u, v]$ na $\mathbb{C}^n$ obstaja taka kompleksna pozitivno definitna $n \times n$ matrika A, da za vsak $u \in \mathbb{C}^n$ in vsak $v \in \mathbb{C}^n$ velja

$$[u, v] = \langle Au, v \rangle.$$

Za vsak skalarni produkt $[u, v]$ na $\mathbb{R}^n$ obstaja taka realna pozitivno definitna $n \times n$ matrika A, da za vsaka $u, v \in \mathbb{R}^n$ velja $[u, v] = \langle Au, v \rangle$.

Dokaz: Naj bo $e_1, \ldots, e_n$ standardna baza za $\mathbb{C}^n$. Pokažimo, da je

$$A = \begin{bmatrix} [e_1, e_1] & \ldots & [e_n, e_1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [e_1, e_n] & \ldots & [e_n, e_n] \end{bmatrix}$$

iskana matrika.

Iz konjugirane simetričnosti skalarnega produkta $[u, v]$ sledi, da je

$$A^* = \begin{bmatrix} \overline{[e_1, e_1]} & \dots & \overline{[e_1, e_n]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{[e_n, e_1]} & \dots & \overline{[e_n, e_n]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e_1, e_1] & \dots & [e_n, e_1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [e_1, e_n] & \dots & [e_n, e_n] \end{bmatrix} = A.$$

Po drugi strani za $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ in $v = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$ velja

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j [e_i, e_j] =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\beta}_1 & \dots & \bar{\beta}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [e_1, e_1] & \dots & [e_n, e_1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [e_1, e_n] & \dots & [e_n, e_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = v^* A u = \langle Au, v \rangle$$

Odtod sledi, da je A pozitivno definitna, saj za vsak neničeln u velja

$$\langle Au, u \rangle = [u, u] > 0.$$

3. QR razcep in razcep Choleskega

Oglejmo si dva znana razcepa matrik.

Izrek (QR razcep)

Če je matrika A obrnljiva kompleksna matrika, potem obstaja unitarna matrika Q in taka zgornje trikotna matrika R, da je $A = QR$. Če je A realna, lahko Q in R izberemo tako, da sta realni.

Dokaz: Naj bodo $v_1, \ldots, v_n$ stolpci matrike A, ker je A obrnljiva, so ti vektorji baza za $\mathbb{C}^n$. Napravimo Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo

$$\begin{array}{rclrcl}
w_1 & = & v_1, & e_1 & = & \frac{w_1}{\|w_1\|} \\
w_2 & = & v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1, & e_2 & = & \frac{w_2}{\|w_2\|} \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
w_n & = & v_n - \langle v_n, e_1 \rangle e_1 - \ldots - \langle v_n, e_{n-1} \rangle, & e_n & = & \frac{w_n}{\|w_n\|}
\end{array}$$

Pomnožimo i-to enačbo skalarno z e_i in dobimo $\langle w_i, e_i \rangle = \langle v_i, e_i \rangle$.

Torej je $w_i = \frac{\langle w_i, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i = \langle w_i, e_i\rangle e_i = \langle v_i, e_i\rangle e_i$ za vsak i. Odtod sledi

$$\begin{aligned}
v_1 &= \langle v_1, e_1\rangle e_1, \\
v_2 &= \langle v_2, e_1\rangle e_1 + \langle v_2, e_2\rangle e_2, \\
&\vdots \\
v_n &= \langle v_n, e_1\rangle e_1 + \langle v_n, e_2\rangle v_2 + \ldots + \langle v_n, e_n\rangle e_n.
\end{aligned}$$

kar lahko po matrično zapišemo z

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle v_1, e_1\rangle & \langle v_2, e_1\rangle & \ldots & \langle v_n, e_1\rangle \\ 0 & \langle v_2, e_2\rangle & \ldots & \langle v_n, e_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \langle v_n, e_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Torej je res $A = QR$, kjer je Q unitarna in R zgornje trikotna. $\square$

Izrek (Razcep Choleskega)

Če je matrika A pozitivno definitna, potem obstaja taka zgornje trikotna matrika R, da je $A = R^* R$.

Dokaz: Če je matrika A pozitivno definitna, potem obstaja taka obrnljiva matrika B, da velja $A = B^* B$. Naj bo $B = QR$, kjer je Q unitarna in R zgornje trikotna. Potem je $A = (QR)^*(QR) = R^* Q^* QR = R^* R$. □

Opomba. Matriko R v razcepu Choleskega lahko izračunamo tudi z naslednjim algoritmom. Začnimo z

$$A_1 := A$$

Recimo, da je A_i pozitivno definitna matrika oblike

$$A_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i,i} & \mathbf{b}_i^* \\ 0 & \mathbf{b}_i & B_i \end{bmatrix}.$$

Potem je $a_{i,i} > 0$, torej lahko definiramo obrnljivo zgornje trikotno matriko

$$R_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{i,i}} & \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}\mathbf{b}_i^* \\ 0 & 0 & I_{n-i} \end{bmatrix}.$$

Potem velja

$$A_i = R_i^* A_{i+1} R_i,$$

kjer je

$$A_{i+1} = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & B_i - \frac{1}{a_{i,i}}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^* \end{bmatrix}.$$

Ta postopek ponovimo n-krat in upoštevamo, da je $A_{n+1} = I$. Dobimo

$$A = R^* R, \quad \text{kjer je} \quad R = R_n \dots R_1.$$

Opomba: Oglejmo si še, kako QR razcep izpeljemo iz razcepa Choleskega.

Drugi dokaz QR razcepa. Naj bo A obrnljiva matrika. Potem je matrika A^*A pozitivno definitna, torej ima razcep Choleskega

$$A^*A = R^*R,$$

kjer je R zgornje trikotna matrika. Pokažimo, da je matrika

$$Q := AR^{-1}$$

unitarna. To sledi iz $Q^*Q = (R^{-1})^*A^*AR^{-1} = (R^{-1})^*R^*RR^{-1} = (R^{-1})^*R^* = (RR^{-1})^* = I^* = I$. Iz $Q = AR^{-1}$ sledi, da je $A = QR$. $\square$

4. Singularni razcep (=SVD)

V tem in naslednjih razdelkih bomo imeli opravka s pravokotnimi (= ne nujno kvadratnimi) diagonalnimi matrikami.

Definicija pravokotne diagonalne matrike

Pravokotna matrika $A = [a_{i,j}]$ je **diagonalna**, če je $a_{i,j} = 0$ za vsaka $i \neq j$.

Primera pravokotnih diagonalnih matrik

Pravokotni matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sta diagonalni.

Izrek o singularnem razcepu

Naj bo A kompleksna $m \times n$ matrika. Potem obstajajo taka unitarna $m \times m$ matrika Q_1, taka unitarna $n \times n$ matrika Q_2 in taka diagonalna $m \times n$ matrika D, kjer $d_{i,i} \geq 0$ za vsak $i = 1, \ldots, \min\{m, n\}$, da velja

$$A = Q_1 D Q_2^{-1}.$$

Če je A realna matrika, potem lahko matriki Q_1 in Q_2 izberemo tako, da sta obe realni (se pravi ortogonalni). Matrika D je že itak realna.

Opomba: Singularnemu razcepu se v angleščini reče "singular value decomposition", kar se okrajša v "SVD".

Opomba: Iz $A = Q_1 D Q_2^{-1} = Q_1 D Q_2^*$ sledi, da je

$$A^* A = Q_2 D^* Q_1^* Q_1 D Q_2^* = Q_2 D^* D Q_2^*, \tag{1}$$

$$A A^* = Q_1 D Q_2^* Q_2 D^* Q_1^* = Q_1 D D^* Q_1^*. \tag{2}$$

Iz (1) sledi, da so stolpci Q_2 ortonormirana baza iz lastnih vektorjev matrike $A^* A$. Podobno iz (2) sledi, da so stolpci Q_1 ortonormirana baza iz lastnih vektorjev matrike AA^*. Če je $m > n$, je

$$D^* D = \begin{bmatrix} d_{1,1}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_{n,n}^2 \end{bmatrix}, DD^* = \begin{bmatrix} d_{1,1}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & d_{n,n}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

kjer so $d_{1,1}^2, \dots, d_{n.n}^2$ lastne vrednosti matrike $A^* A$, torej so $d_{1,1}, \dots, d_{n,n}$ singularne vrednosti matrike A. Podobno je v primerih $m = n$ in $m < n$.

Dokaz izreka: Naj bo A kompleksna $m \times n$ matrika. (Realen primer ima skoraj enak dokaz.) Konstrukcijo singularnega razcepa za A razdelimo v štiri dele: konstrukcije Q_2, D in Q_1 ter dokaz formule $AQ_2 = Q_1 D$.

Konstrukcija matrike Q_2. Najprej uredimo lastne vrednosti matrike A^*A po velikosti. Nato izračunamo pripadajoče lastne podprostore. Za vsakega od njih določimo ortonormirano bazo. Elemente v uniji teh baz označimo z $v_1, \ldots, v_n$, pripadajoče lastne vrednosti pa z $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Velja torej

$$A^*Av_i = \lambda_i v_i$$

za vsak $i = 1, \ldots, n$ in $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Definirajmo

$$Q_2 = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \ldots & v_n \end{array} \right]$$

Ker je $v_1, \ldots, v_n$ ortonormirana baza za $\mathbb{C}^n$, je matrika Q_2 unitarna.

Konstrukcija matrike D. Naj bo r rang matrike A. Vemo, da je r enak rangu matrike A^*A, zato velja

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0, \quad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

Naj bo $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ za $i = 1, \ldots, r$ in naj bo D diagonalna $m \times n$ matrika, ki ima po diagonali $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ in morda ničle. Eksplicitno

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \sigma_r & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Konstrukcija matrike Q_1. Za $i = 1, \ldots, r$ definirajmo

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$

Pokažimo, da ti vektorji tvorijo ortonormirano množico v $\mathbb{C}^m$. Velja

$$\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A v_i, A v_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A^* A v_i, v_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle =$$

$$= \frac{\lambda_i}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i \sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle = \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{če } j = i \\ 0 & \text{če } j \neq i \end{cases}$$

za vsaka $i, j = 1, \ldots, r$. Naj bo $u_{r+1}, \ldots, u_m$ dopolnitev ortonormirane množice $u_1, \ldots, u_r$ do ortonormirane baze za $\mathbb{C}^m$ in naj bo

$$Q_1 = \begin{bmatrix} u_1 & \ldots & u_m \end{bmatrix}.$$

Za konec dokažimo še, da je res $AQ_2 = Q_1 D$. Iz

$$Q_2 = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_r & v_{r+1} & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

sledi, da je

$$\begin{aligned} AQ_2 &= \begin{bmatrix} Av_1 & \dots & Av_r & Av_{r+1} & \dots & Av_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Av_1 & \dots & Av_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pri drugem enačaju smo upoštevali, da za $i = r+1, \dots, n$ velja $A^* A v_i = \lambda_i v_i = 0$, odkoder zaradi $\mathrm{Ker}\, A^* A = \mathrm{Ker}\, A$ sledi $Av_i = 0$. Iz

$$Q_1 = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_r & u_{r+1} & \dots & u_m \end{bmatrix}$$

in definicije D sledi, da je

$$\begin{aligned} Q_1 D &= \begin{bmatrix} \sigma_1 u_1 & \dots & \sigma_r u_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Av_1 & \dots & Av_r & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pri drugem enačaju smo upoštevali, da je $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ za $i = 1, \dots, r$. $\square$

Oglejmo si še geometrijski pomen singularnega razcepa.

Posledica

Naj bo A realna $m \times n$ matrika in naj bo K enotska krogla v $\mathbb{R}^n$. Potem je množica $\{Av \mid v \in K\}$ elipsoid v podprostoru $\operatorname{Im} A \subseteq \mathbb{R}^m$. Polosi tega elipsoida so ravno neničelne singularne vrednosti matrike A.

Dokaz: Naj bo $A = Q_1 D Q_2^{-1}$ singularni razcep matrike A, ki smo ga konstruirali v dokazu prejšnjega izreka. Vzemimo poljuben vektor v iz enotske krogle v $\mathbb{R}^n$ in ga razvijmo po stolpcih $v_1, \ldots, v_n$ matrike Q_2. Velja $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$, kjer $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$.

Naj bodo $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ neničelni elementi matrike D in naj bodo $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1, \ldots, u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r$ začetni stolpci matrike Q_1. Potem velja $Av = x_1 A v_1 + \ldots + x_n A v_n = x_1 \sigma_1 u_1 + \ldots + x_r \sigma_r u_r = y_1 u_1 + \ldots + y_r u_r$, kjer je $\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \ldots + \frac{y_r^2}{\sigma_r^2} = x_1^2 + \ldots + x_r^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_r^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1$. Torej Av res leži v r-razsežnem elipsoidu v $\operatorname{Im} A$ s polosmi $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$.

Velja tudi obratno. Vsak element $y_1 u_1 + \ldots + y_r u_r$ tega elipsoida je slika nekega elementa iz enotske krogle, namreč slika od $\frac{y_1}{\sigma_1} v_1 + \ldots + \frac{y_r}{\sigma_r} v_r$.