POGOJNA IN ABSOLUTNA KONVERGENCA

V TEJ LEKCIJI OBRAVNAVAMO VRSTE, KATERIH ČLENI NISO NUJNO POZITIVNI t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

LOČIMO DVE VRSTI KONVERGENCE:

- VRSTA JE <u>ABSOLUTNO KONVERGENTNA</u>, ČE KONVERGIRA VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (LAHKO UPORABIMO KRITERIJE ZA KONVERGENCO VRST S POZITIVNIMI ČLENI).
- VRSTA JE <u>POGOJNO KONVERGENTNA</u>, ČE OBSTAJA NJENA VSOTA OZ. LIMITA ZAPOREDJA DELNIH VSOT, NE KONVERGIRA PA ABSOLUTNO.

LEIBNITZOV KRITERIJ:

ČE VELJA $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \dots$ IN $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, POTEM VRSTA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ VSAJ POGOJNO KONVERGIRA.

(1) NALOGA: OBRAVNAVAJ KONVERGENCO NASLEDNJIH VRST.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\, a^{2n}}$, $a > 0$. (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $|a| \neq 1$.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}$

KER JE $\sin(n)$ OMEJEN, 2^n PA ZELO HITRO NARAŠČA, SUMIMO DA JE VRSTA ABSOLUTNO KONV.

RES,

$$\left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

KER JE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ KONV., JE $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right|$ KONV. PO PRIMERJALNEM KRITERIJU t.j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{2^n}$ JE ABSOLUTNO KONVERGENTNA.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$.

OGLEJMO SI NAJPREJ ABSOLUTNO KONVERGENCO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

TA VRSTA JE KONVERGENTNA NATANKO ZA $\alpha > 1$.

SEDAJ UPORABIMO LEIBNITZOV KRITERIJ. ZA $\alpha \in (0,1]$ VELJA:

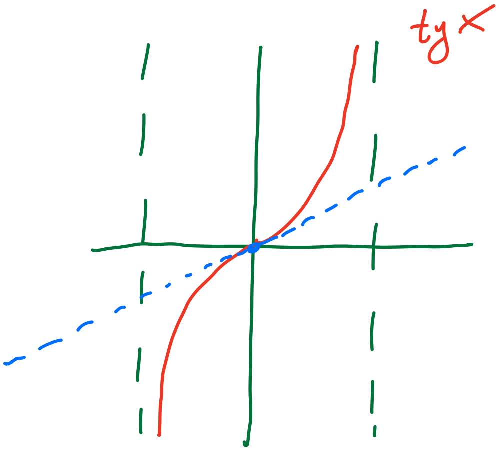
$$\frac{1}{1^\alpha} > \frac{1}{2^\alpha} > \frac{1}{3^\alpha} > \dots \quad \text{IN} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = 0.$$

TOREJ JE OSNOVNA VRSTA POGOJNO KONVERGENTNA.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$

VELJA: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n} = 0$, VENDAR PA JE VPRAŠANJE, ALI JE TO DOVOLJ ZA ABSOLUTNO KONVERGENCO.

SKICIRAJMO GRAF:



$$(\operatorname{tg} x)'\Big|_{x=0} = \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=0} = 1$$

t.j. $y = x$ JE TANGENTNA

TOREJ VELJA:

$$\operatorname{tg} x > x \quad \text{ZA} \quad x > 0 \ \text{IN} \ x < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{n} > \frac{1}{n} \quad \text{ZA} \quad n \in \mathbb{N}.$$

OD TOD SKLEPAMO:

$$\left| (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right| = \operatorname{tg} \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$$

KER $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGIRA, NAŠA VRSTA NI ABS. KONVERGENTNA.

ALI JE MORDA VSAJ POGOJNO KONVERGENTNA? DA.

$$\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots \Rightarrow \operatorname{tg} 1 > \operatorname{tg} \frac{1}{2} > \operatorname{tg} \frac{1}{3} > \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n} = 0$$

PO LEIBNITZOVEM KRITERIJU JE TO DOVOLJ.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$

NADGRADIMO OCENO IZ PREJŠNJE NALOGE:

$$\left| (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right| = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n}$$

t.j. VRSTA NI ABS. KONVERGENTNA. KER PA JE ZAPOREDJE $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ NARAŠČAJOČE, VELJA, DA JE ZAPOREDJE $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ MONOTONO PADAJOČE IN IMA ZNOVA LIMITO ENAKO NIČ, t.j. VRSTA JE POGOJNO KONV.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^{2n}}$, $a>0$.

OGLEJMO SI ABSOLUTNE VREDNOSTI:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,a^{2n}}\right| = \frac{1}{(n+1)\,a^{2n}}$$

UPORABIMO KVOCIENTNI KRITERIJ:

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)a^{2n+2}} \cdot (n+1)a^{2n} = \frac{1}{a^2} < 1 \quad \text{ZA } a>1.$$

UGOTOVILI SMO TOREJ:

- ZA $a>1$ JE VRSTA ABS. KONVERGENTNA.
- ZA $a<1$ JE VRSTA ABS. DIVERGENTNA.
- ZA $a=1$ PA IMAMO VRSTO $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, KI JE ABSOLUTNO DIVERGENTNA.

OGLEJMO SI ŠE POGOJNO KONVERGENCO ZA $a \leq 1$:

- ČE $a=1$, JE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ POGOJNO KONV. PO LEIBNITZOVEM KRITERIJU.
- ČE $a<1$, PA JE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^{2n}}$ POGOJNO IN ABS. DIVERGENTNA, SAJ LAHKO PIŠEMO $a=\frac{1}{b}$, $b>1$:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,a^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}\,b^{2n}}{(n+1)} \not\to 0$$

ČLENI NE GREDO PROTI NIČ.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $|a| \neq 1$.

ZNOVA ZAČNIMO Z ABS. KONVERGENCO:

$$\left|\frac{a^n}{1-a^n}\right| = \begin{cases} \frac{|a|^n}{|a|^n-1}, & |a|>1 \\ \frac{|a|^n}{1-|a|^n}, & |a|<1 \end{cases}$$

SKLEP:

~ ČE $|a|>1$, VELJA $\lim_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{|a|^n-1} = 1$, KAR POMENI, DA VRSTA ABS. DIVERGIRA. ŠE VEČ, VELJA TUDI $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-a^n} = -1$, ZATO VRSTA TUDI POGOJNO DIVERGIRA.

~ ČE $|a|<1$ TEH TEŽAV NI, IMAMO PA TUDI OCENO:

$$\frac{|a|^n}{1-|a|^n} \leq |a|^n.$$

KER JE $\sum_{n=1}^{\infty} |a|^n$ KONV. GEOM. VRSTA, JE OSNOVNA VRSTA ABSOLUTNO KONVERGENTNA.

2 NALOGA: S PRIMEROM

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

POKAŽI, DA JE POGOJ MONOTONOSTI V LEIBNITZOVEM KRITERIJU NUJNO POTREBEN t.j. POKAŽI, DA SO OSTALI POGOJI IZPOLNJENI, A VRSTA NI POGOJNO KONV.

REŠITEV:

OČITNO GRE ZA ALTERNIRAJOČO VRSTO Z LIMITO

$$\lim_{n\to\infty} \pm \frac{1}{\sqrt{n} \mp 1} = 0,$$

VENDAR PA VELJA:

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$$

$$\sqrt{n+1}-1 < \sqrt{n}+1$$

$$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 2$$

$$1 < 2\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \checkmark$$

POKAŽIMO, DA JE VRSTA DIVERGENTNA:

$$\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} = \frac{2}{n+1}$$

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n+1}$$

TO JE DELNA VSOTA HARMONIČNE VRSTE, KI DIVERGIRA. POVEDANO DRUGAČE:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n+1} \quad \text{DIV.}$$

DEJSTVO:

ČE VRSTA KONVERGIRA ABSOLUTNO, JE NJENA VSOTA NEODVISNA OD VRSTNEGA REDA. ZA POGOJNO KONVERGENTNE VRSTE TO NI RES.

NALOGA: VELJA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. Z UPOŠTEVANJEM TEGA REZULTATA IZRAČUNAJ VSOTO VRSTE:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots$$

REŠITEV:

IZRAZIMO VSOTO TREH ZAPOREDNIH ČLENOV S ČLENI ZNANE VRSTE:

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4n} =$$

$$= \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

TOREJ VELJA:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2$$

MORALA:

Z ZAMENJAVO VRSTNEGA REDA SMO DOBILI DRUGO VSOTO. IZKAŽE SE, DA BI LAHKO DOBILI TUDI POLJUBNO REALNO ŠTEVILO.