

$$C_1: x^2 + 2y^2 + z^2 + 3xy = 0$$

$$C_2: xz^2 - y^2(y+x) = 0$$

Izračunajte vsa presečišča in njihove večkratnosti

Najprej najdemo točko, ki leži na $C_1 \cap C_2$.

$$[1, 0, 0] \in C_2$$

$$[0, 1, 0] \notin C_1, C_2$$

$\Rightarrow$ računamo rezultante polinomov

$$F = 2y^2 + 3xy + x^2 + z^2, \quad C_1 = V(F)$$

$$G = -y^3 - y^2x + xz^2, \quad C_2 = V(G)$$

$$R_{F,G} = \begin{vmatrix} 2 & 3x & x^2 + z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3x & x^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3x & x^2 + z^2 \\ -1 & -x & 0 & xz^2 & 0 \\ 0 & -1 & -x & 0 & xz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= V_1' = V_1 + 2V_4$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & x^2 + z^2 & 2xz^2 & 0 \\ 0 & 2 & 3x & x^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3x & x^2 + z^2 \\ -1 & -x & 0 & xz^2 & 0 \\ 0 & -1 & -x & 0 & xz^2 \end{vmatrix} =$$

↑
razvoj po prvi stolpci

$$1 \cdot x \cdot x^2 + z^2 \cdot 2xz^2 + 0 \quad V_1' = V_1 + xV_4$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3x & x^2+z^2 & 0 \\ 0 & 2 & 3x & x^2+z^2 \\ -1 & -x & 0 & xz^2 \end{vmatrix} = v_2' = x v_2 - 2 v_1$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & z^2 & 2xz^2 & x^2z^2 \\ 0 & x^2-2z^2 & x^3-2xz^2 & 0 \\ 0 & 2 & 3x & x^2+z^2 \\ -1 & -x & 0 & xz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} z^2 & 2xz^2 & x^2z^2 \\ x^2-2z^2 & x^3-3xz^2 & 0 \\ 2 & 3x & x^2+z^2 \end{vmatrix} = z^2 x \begin{vmatrix} 1 & 2 & x^2 \\ x^2-2z^2 & x^2-3z^2 & 0 \\ 2 & 3 & x^2+z^2 \end{vmatrix}$$

z^2 iz prve vrstice
 x iz drugega stolpca

razvoj po zadnjem stolpcu

$$= z^2 x \left(x^2 \cdot \begin{vmatrix} x^2-2z^2 & x^2-3z^2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (x^2+z^2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x^2-2z^2 & x^2-3z^2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \cancel{z^2 x} \left(x^2 \left(3(x^2-2z^2) - 2(x^2-3z^2) \right) + (x^2+z^2) \left(x^2-3z^2 - 2(x^2-2z^2) \right) \right)$$

$$= \cancel{0.5 x^4} \left(\cancel{x^4(3-2+1-2)} + x^2 z^2 (-6+6) \right) +$$

$$\begin{aligned}
 &= z^2 x \left(x^2 (x^2) \right) + z^2 x \left((x^2 + z^2)(-x^2 + z^2) \right) \\
 &= z^2 x^5 + z^2 x (-x^4 + z^4) = z^6 x
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{vrednoba determinanta je } \frac{z^6 x}{x} = \underline{\underline{z^6}}$$

$$F(x, y, 0) = x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$G(x, y, 0) = -y^3 - y^2 x = -y^2(y + x) = 0$$

① $y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ re dobimo projekcijo točke $[0, 0, 0]$ in točko

$$\textcircled{2} \quad y = -x \Rightarrow x^2 + 2x^2 - 3x^2 = 0$$

$\Rightarrow$ točka $[1, -1, 0]$ je v preseku $C_1 \cap C_2$

$\Rightarrow$ vrednoba = 6.

↑
Bezant

Preverimo, da je presrečka vrednoba poljubne krivulje C (ki ne vsebuje premice p) in premice p po Bezantovem izreku ista kot jo dobimo po običajni definiciji.

... Tudi ... premice p in

krivki C . Obstaja projekcija, ki preslika premico p v $z=0$ in T v $[0,0,1]$.

$$f = z^n + f_{n-1} z^{n-1} + \dots + f_1 z + f_0 \quad f_i = f_i(x, y)$$

Rezultat, ki jo namo računati je kraj enaka:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & f_{n-1} & \dots & f_1 & f_0 \end{vmatrix} = f_0$$

je to kot če bi naredili $f \cap (z=0)$ po določeni definiciji

Krivka C je podana z enačbo $F = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$ ← spet smo v afnem

a) Dokazi, da je $(0,0)$ singularna točka in izračunaj red te singularne točke. Dokazi, da je $(0,0)$ edina singularna točka.

b) Poišči vse tangente v točki $(0,0)$ in presede večkratnosti teh tangent.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x + 6xy \stackrel{x=0, y=0}{=} 0 \quad \leftarrow \text{vabojer}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 3x^2 - 3y^2 \stackrel{x=0, y=0}{=} 0 \quad (0,0) \text{ bi na krivki}$$

$$\text{must be } 0: \quad \frac{\partial F}{\partial x} = x(4x^2 + 4y^2 + 6y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4x^2y + 4y^3 + 3x^2 - 3y^2 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 + 6y = 0$$

$$2x^2 = -2y^2 - 3y \quad \leadsto \quad \underline{x^2} = \frac{1}{2}(-2y^2 - 3y)$$

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \frac{1}{2}(-2y^2 - 3y)y + 4y^3 + 3\left(\frac{1}{2}(-2y^2 - 3y)\right) - 3y^2 = 0 \\ & = \cancel{-4y^3} - 6y^2 + \cancel{4y^3} - 3y^2 - \frac{9}{2}y - 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$-12y^2 - \frac{9}{2}y = 0$$

$$y\left(-12y - \frac{9}{2}\right) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad -12y = \frac{9}{2}$$

$$y = -\frac{9}{24} = -\frac{3}{8}$$

$$\stackrel{\text{D.N.}}{\Rightarrow} x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Punkte $\left(\pm \frac{3\sqrt{3}}{8}, -\frac{3}{8}\right)$ ne letzteren nur $\leftarrow \text{D.N.}$

musi kiralji (kar ko vendar iz nase kralje)

$\Rightarrow (0,0)$ je celna singularna točka

Določimo red te točke:

$$\text{red}(0,0) = 3$$

velja p singular $\Leftrightarrow \text{red}(c) > 1$

$\uparrow$
sbrinj najnižjega monoma

b) Vzamemo najnižji monom in ga enačimo z 0:

$$3x^2y - y^3 = 0$$

$$y(3x^2 - y^2) = 0$$

$$\underline{y}(\underline{\sqrt{3}x - y})(\underline{\sqrt{3}x + y}) = 0$$

$\Rightarrow$ 3 tangente $\underline{y=0}$, $\underline{y=\sqrt{3}x}$, $\underline{y=-\sqrt{3}x}$

Še preseda večkratost:

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$$

① $y=0$: $F(x,0) = x^4 \Rightarrow$ preseda večkratost
tangente v $(0,0)$ je enaka 4.

②, ③ $F(x, \pm\sqrt{3}x) = (x^2 + 3x^2)^2 = (4x^2)^2 = 16x^4$

$\Rightarrow$ preseda večkratost vseh tangent
so enake 4 v $(0,0)$.

nadaljevalne naloge

c) Nariši krivuljo

d) Poišči racionalno parametrizacijo krivulje C
in pripadajoče projektivne krivulje

c) $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$

s polarnimi koordinatami:

$$x = \cos \varphi$$

$$y = \sin \varphi$$

$$r^4 + 3r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - r^3 \sin^3 \varphi = 0$$

$$r^3 (r + 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi) = 0$$

$$r + 3(1 - \sin^2 \varphi) \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 0$$

$$r + 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi = 0$$

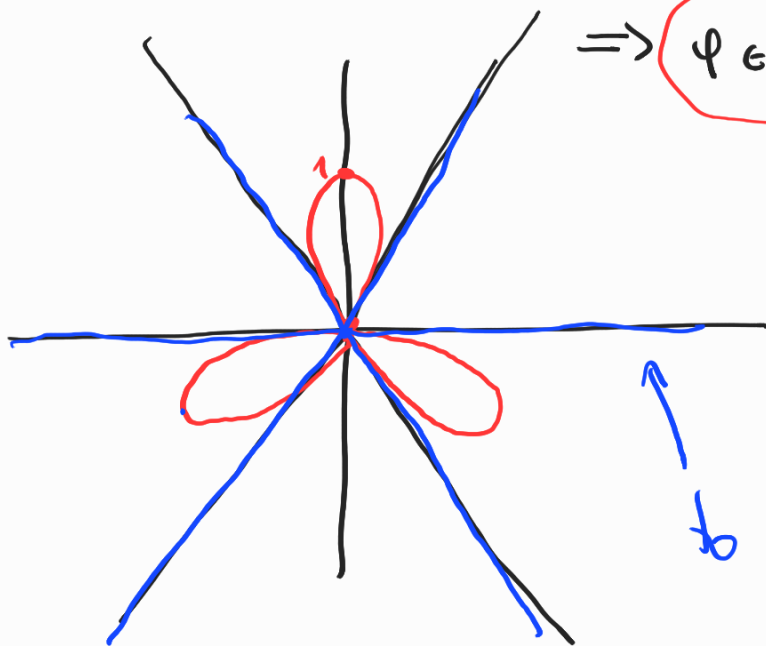
$$r = 4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi$$

$$\boxed{r = -\sin 3\varphi}$$

$$- \sin(2\varphi + \varphi) \stackrel{\text{D.M.}}{=} \dots = 4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi$$

$$\sin 3\varphi \leq 0 \Rightarrow 3\varphi \in [\pi, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$$

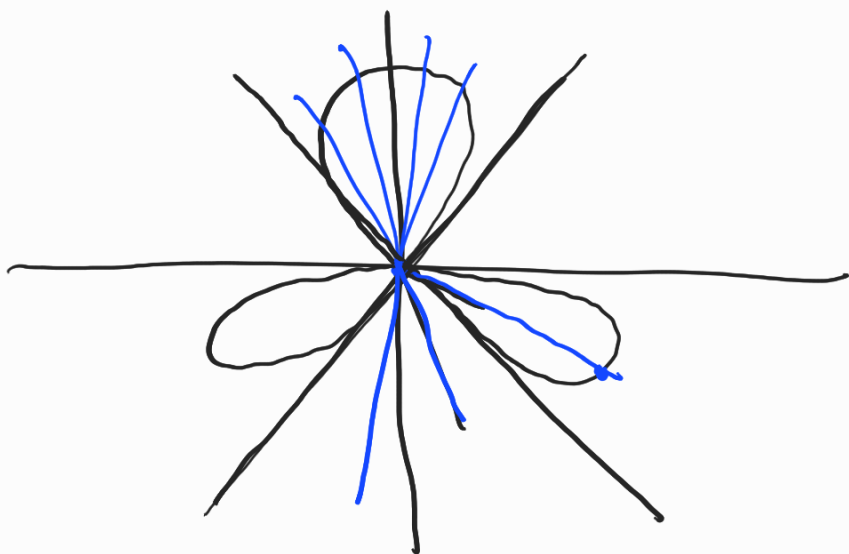


$$\varphi = \frac{\pi}{3} : r = -\sin\pi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} : r = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$$

to so maše 3 tangente
 $y=0$ $y=\sqrt{3}x$
 $y=-\sqrt{3}x$

d) Ali obstojn racionalna parametrizacija? Da, ker je stopnja krivulje 4 in imamo točko z redom 3.



$y=tx$
 ↓
 vsakrat v maso

krivuljo

$$(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$$

$$(x^2 + t^2x^2)^2 + 3x^3t - t^3x^3 = 0$$

$$x^4(1+t^2)^2 + 3x^3t - t^3x^3 = 0$$

$$x^3 \left(x(1+t^2)^2 + 3t - t^3 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \text{ali} \quad x(1+t^2)^2 = t^3 - 3t$$

$$x = \frac{t^3 - 3t}{(1+t^2)^2} = \frac{t(t^2 - 3)}{(1+t^2)^2}$$

$$y = \frac{t^2(t^2 - 3)}{(1+t^2)^2}$$

$\Rightarrow$ racionalna parametrisacija je enaka

$$t \mapsto \left(\frac{t(t^2 - 3)}{(1+t^2)^2}, \frac{t^2(t^2 - 3)}{(1+t^2)^2} \right)$$

določiti moramo še pripadajočo racionalno parametrisacijo
za projektivno krivuljo:

$$\left[\frac{t(t^2 - 3)}{(1+t^2)^2}, \frac{t^2(t^2 - 3)}{(1+t^2)^2}, 1 \right] \in \mathbb{P}^2$$

$$\left[t(t^2 - 3), t^2(t^2 - 3), (1+t^2)^2 \right] (*)$$

racionalna parametrizacija za projektno krivuljo C

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow C$$

$$[t, s] \mapsto [p_1(t, s), p_2(t, s), p_3(t, s)], \text{ kjer}$$

$p_i(t, s)$ polinomi in je preslikava
dobro definirana in za $s=1$
dobimo (*).

Da je preslikava dobro definirana morajo biti
polinomi $p_i(t, s)$ homogeni in iste stopnje.

$$[t, s] \xrightarrow{\varphi_1} [t^3 - 3ts^2, t^2(t^2 - 3s^2), (s^2 + t^2)^2]$$

ali je φ_1 dobro definirana?

$$[t, 0] \mapsto [t^3, t^4, t^4] \longrightarrow \text{velja da tole iz } \mathbb{P}^2$$

↑
velja isto točka $\in \mathbb{P}^1$

$\Rightarrow \varphi_1$ ni dobro definirana.

Ampak φ_1 ne izpolnjuje pogoja da so vsi polinomi
istih stopenj. (prva koordinata stopnje 3, preostali dve
stopnje 4)

Torej pravi odgovor je

$$\varphi: \mathbb{P}^1 \rightarrow C$$

$$[t, s] \mapsto [st^3 - 3ts^3, t^2(t^2 - 3s^2), (s^2 + t^2)^2]$$

↑

racionalna parametrizacija za projektno krivuljo.

$$[t, s] \mapsto [p_1(t, s), p_2(t, s), p_3(t, s)]$$

polinomi in iste stopnje

je γ dobro definirana:

↑
stopnja = d

$$\begin{aligned} \lambda \cdot [t, s] &\mapsto [p_1(\lambda t, \lambda s), p_2(\lambda t, \lambda s), p_3(\lambda t, \lambda s)] \\ &= [\lambda^d p_1(t, s), \lambda^d p_2(t, s), \lambda^d p_3(t, s)] = \\ &= \lambda^d [p_1(t, s), p_2(t, s), p_3(t, s)] \end{aligned}$$

Poišči singularne točke projektilne krivulje C , podane z enačbo

$$xz^2 + iy^3 = x^3 + 2ix^2z$$

Doloci vse te točke, vse tangente v teh točkah in presečne vektorosti teh tangent. Zapiši enačbo tangente na C v točki $[1, i, 0]$.

Singularne točke: $F = xz^2 + iy^3 - x^3 - 2ix^2z = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = z^2 - 3x^2 - 2izx = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3iy^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2xz - 2ix^2 = 0$$

$\Downarrow$

$$x(z - ix) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{ali} \quad z = ix$$

$\Downarrow$

$$z = 0$$

$\rightarrow$

$[0, 0, 0]$ ni proj. točka

$\Downarrow$

$$-x^2 - 3x^2 + 4x^2 = 0 \quad \checkmark$$

$\Downarrow$

dodane točke

$$[x, 0, ix] =$$

$$[x, 0, ix]$$

$$= [1, 0, i]$$

Preverimo, da $[1, 0, i]$ leži na krivulji:

$$i^2 + 0 = 1 + 2i^2$$

$$-1 = 1 - 2 \Rightarrow \underline{\underline{-1 = -1}} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ točka $[1, 0, i]$ leži na krivulji in je edna singularna točka.

(Po Eulerji formuli je v popolnem dovolj preveriti, da so le prve odnosi enaki 0, potem točka leži na krivulji).

Spomnimo se krivulje v Taylorjem vrsto v okolici točke (a, b)

$$P(x, y) = \frac{f_{xx}(a, b)}{2} (x-a)^2 + f_{xy}(a, b)(y-b)(x-a) + \frac{f_{yy}(a, b)}{2} (y-b)^2$$

V našem primeru imamo: $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ in:

$$F_x = z^2 - 3x^2 - 4ixz$$

$$F_{xx} = -6x - 4iz$$

$$F_{xx}([1, 0, i]) = -6 + 4 = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow [1, 0, i]$ je reda 2

Za tangente pogledamo afino: $x=1$:

$$z^2 + iy^3 = 1 + 2iz$$

$$F(1, y, z) = z^2 + iy^3 - 1 - 2iz \quad (*)$$

→ ~~afin~~ afine iskan tangente od
 $F(1, y, z)$ v točki $(0, i)$

$$\underline{w = z - i} \quad \Rightarrow \quad z = w + i$$

$$(*) \quad w^2 + \cancel{2iw} - \cancel{1} + iy^3 - \cancel{1} - \cancel{2iw} + \cancel{2}$$

$$\underline{w^2 + iy^3 = 0} \Rightarrow w^2 \text{ je manj kot najmanjše stopnje.}$$

$\Rightarrow w = 0$ je dvojna tangenta.

$$\Rightarrow z - i = 0$$

$\Rightarrow z = i$ je afina tangenta

$\Rightarrow \underline{z = ix}$ je manj kot najmanjše stopnje. *→ določa s homogeniziranjem*

tangenta. Torej dvojna tangenta v
 točki $[1, 0, i]$.

Preseči vrednosti: $\boxed{iy^3 = 0} \Rightarrow$ preseči



večkrat je 3.

Tangente v $[1, i, 0]$?

$P = [1, i, 0]$ je resnična točka ali
gladna točka $\Rightarrow$

tangente v tej točki je

$$x \cdot F_x(P) + y \cdot F_y(P) + z \cdot F_z(P) = 0$$

kar

$$-3x - 3iy - 2iz = 0$$

Krivka C je podana z enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 - x^3 = 0$$

a) Nariši krivko

b) Poišči singularne točke in njihove rede

c) Poišči vse tangente v singularnih točkah in
njihove preseke večkrat s C .

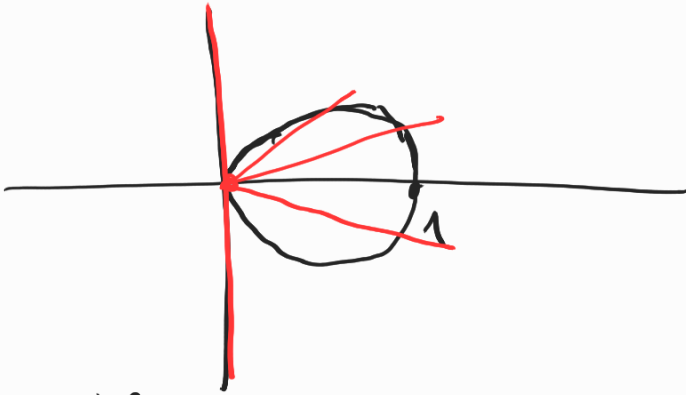
d) Poišči rec. parametrizacijo.

a) $x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$

$$r^4 - r^3 \cos^3 \varphi = 0$$

$$r = \cos^3 \varphi$$

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$F = (x^2 + y^2)^2 - x^3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\textcircled{1} y=0 \Rightarrow 4x^3 - 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(4x - 3) = 0$$

$$\textcircled{1.1} x=0 \text{ leži na krivki:} \\ \Rightarrow \text{skupina točk} \\ (0,0)$$

$$\textcircled{1.2} x = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}, 0\right) \text{ le leži na} \\ \text{krivki.}$$

$$\textcircled{2} x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \\ \text{t.j. } (0,0)$$

$\Rightarrow (0,0)$ edina singularna točka

$(0,0)$ je reda 3.

Tangente: $x^3=0 \Rightarrow x=0$ je edina tangenta
preseka veštinaost:

$$F(0,y) = y^4 \Rightarrow \text{preseka veštinaost je } 4,$$

$(y=tx)$ dobimo $(x^2 + t^2 x^2)^2 - x^3 = 0$

$$x^4 + 2t^2 x^4 + t^4 x^4 - x^3 = 0$$

$$x + 2t^2 x + t^4 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{1 + 2t^2 + t^4} = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{t}{(1+t^2)^2}$$

$\Rightarrow$ racionalna parametrizacija v afinem
 $t \mapsto \left(\frac{1}{(1+t^2)^2}, \frac{t}{(1+t^2)^2} \right)$

Pripadujoča projektivna parametrizacija:

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$$
$$[t,s] \mapsto [s^4, s^3 t, (s^2 + t^2)^2]$$

$$\mathbb{C}: (x^2 + y^2)^2 - x^3 z = 0$$

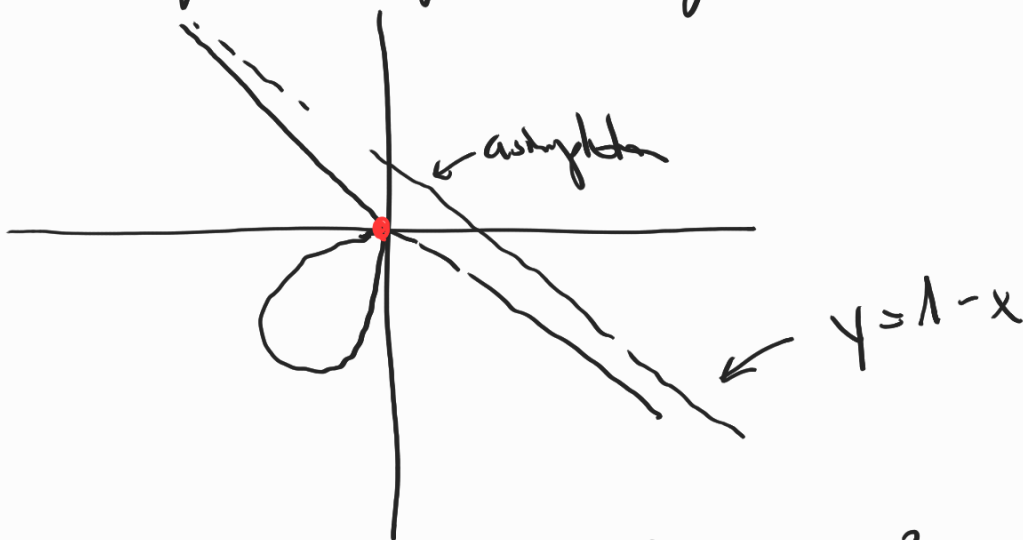
1) $\left[\frac{1}{(1+t^2)^2}, \frac{t}{(1+t^2)^2}, 1 \right]$

$$\left[\frac{1}{(1+t^2)^2}, \frac{t}{(1+t^2)^2}, 1 \right] \cdot (1+t^2)$$

$$[1, t, (1+t^2)^2]$$

Naj bo krivulja podana z enačbo
 $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ (Descartes list)

Analizirajmo krivuljo kot prej in dodamo asimptoto.



Singulane točke: $F(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0 \leadsto y = -x^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 3x = 0 \leadsto x = -y^2$$

$$x = -x^4$$

$$x(1+x^3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$

Taj točka $(0,0)$ je singularna

In leži na krivlj:

Za proučiti more singularne točke (x, y) brez
večji $y = -x^2$, $x = -y^2$

$$x^3 + y^3 + 3xy = 0$$

$$-y^6 + y^3 - 3y^3 = 0$$

$$y^3 (-y^3 - 2) = 0 \rightarrow$$

$\Rightarrow$ samo a točka $(0, 0)$ je singularna.

Racionalna parametrizacija:

$$y = tx$$

$$x^3 + t^3 x^3 + 3x^2 t = 0$$

$$x^2 (x + t^3 x + 3t) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{3t}{1+t^3} \quad y = -\frac{3t^2}{1+t^3}}$$

$$t \mapsto \left(-\frac{3t}{1+t^3}, -\frac{3t^2}{1+t^3} \right)$$

Za asintotob more priskuti "tangente v neskončnosti".
priporočajo profektivne karte.

Homogenizirano: $x^3 + y^3 + 3xy \circledast z = 0$

Presečeno z $z = 0$ / $x^3 + y^3 = 0$

Toda $[1, \underline{-1}, 0]$ je v presledu in sedaj želimo
določiti tangentno v tej točki.

$$\boxed{x=1}$$

$$1+y^3+3yz=0$$

Zunika nas tangentna v točki $(\underline{-1}, 0)$

$$w=y+1$$

$$1+(w-1)^3+3 \cdot (w-1)z=0$$

$$y=w-1$$

$$\cancel{1+w^3-3w^2+3w} - \cancel{1} + 3wz - 3z = 0$$

$$w^3 - 3w^2 + 3wz + \underline{3w - 3z} = 0$$

$$w=z$$

$$y+1=z$$

afekta tangentna

$\Rightarrow$ naša projektna tangentna na točko $[1, -1, 0]$ je
torej enaka $y+x=z$.

$\Rightarrow$ naša iskana asymptota je enaka $y+x=\underline{\underline{1}}$

Krivulja C je podana z enačbo

$$xy(x^2-y^2)-(x^2+y^2)=0$$

Analiziraj krivuljo!

$$\frac{1}{2} \sinh 2\varphi \cosh 2\varphi$$

$$x=r \cosh \varphi$$

$$r^2 \sinh \varphi \cosh \varphi (r^2 \cosh^2 \varphi - r^2 \sinh^2 \varphi) - r^2 = 0 / r^2$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$r^2 \sin \varphi \cos \varphi (1 - \sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 1 = 0$$

$$r^2 = \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi \cos \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi (1 - 2 \sin^2 \varphi)}$$

$$r^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} (\cos 2\varphi) - 1 = 0$$

$$\boxed{r^2 = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot \sin 2\varphi \cos 2\varphi} = \frac{4}{\sin 4\varphi}}$$

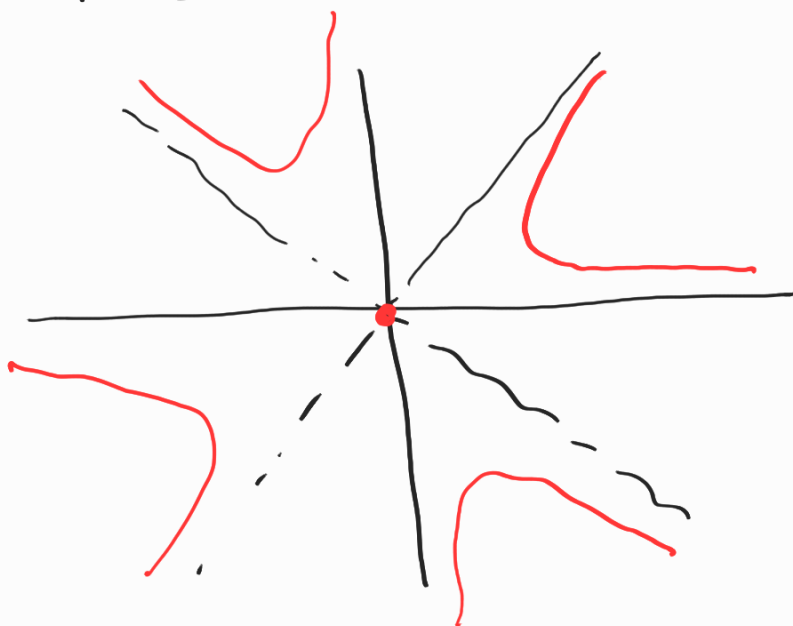
$$\Rightarrow \boxed{r^2 = \frac{4}{\sin 4\varphi}}$$

$$\cup \{r=0\}$$

$$\sin 4\varphi \geq 0$$

$$4\varphi \in [0, \pi] + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$$



Skizze. Achse:

$$F = x^3 y - x y^3 - x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y - y^3 - 2x = 0 \quad / x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 - 3xy^2 - 2y = 0 \quad / y$$

Todaa $(0,0)$ je edha stajljnna točka
(kako nadeljč) $\rightarrow D.M.$

$(0,0)$ je edha 2

tan tangente: $x^2 + y^2 = 0$

$\Rightarrow$ imamo dve tangenti

$$\begin{array}{l} y = ix \\ y = -ix \end{array}$$

$$x^3y - xy^3 - x^2 - y^2 = 0 \quad / 2$$

$$3x^3y - xy^3 - 2x^2 = 0 \quad -$$

$$x^3y - 3xy^3 - 2y^2 = 0 \quad -$$

$$-2x^3y + 2xy^3 = 0$$

$$2xy(-x^2 + y^2) = 0$$

$$\boxed{x^2 = y^2}$$

$\Rightarrow (0,0)$ je edina singularna točka.

Dimenziji vektorskega prostora $V_{n,k}$ homogenih polinomov stopnje k v $n+1$ spremenljivkah je enaka

$$\dim V_{n,k} = \binom{n+k}{n}$$

Točke $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{P}^2$ ležijo v splosni leži, če je

$$\dim \{F \in \mathcal{O}(x,y,z) : F \text{ homogen st. } d, F(A_i) = 0 \text{ za vse } i\} = \dim V_{2,d} - m$$

Skazi $\binom{d+2}{2} - 1$ točk v splosni leži črte natančno ima kinerja stopnje d . (pedinjer)

$d=2$: $\binom{4}{2} - 1 = 6 - 1 = 5$. Čez 5 točk v splosni leži vsakega natančno manj skazov.

$$d=1: \binom{3}{2} - 1 = 2$$

leži če je d razcepna, potem ima lahko največ $\binom{d-1}{2}$ singularnih točk.

Ker si bomo pogledali poljer knuf, in ima natno
 $\binom{d-1}{2}$ splynih bč (konstrukcija je bta razen 93)

Oglejmo si to konstrukcija:

$$I := (-1, 1) \subset \mathbb{R} \quad \bar{I} := [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

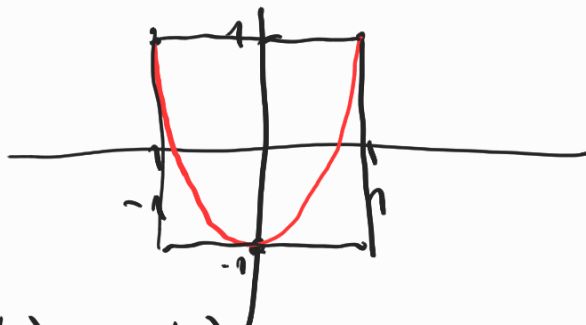
Definiramo Chebysheve polnome T_n . "Originalna priimje" iz
 enibe $\cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$ for $n \in \mathbb{N}$

T_n so definirane klarsko kot

$$\{T_0(t) := 1, T_1(t) := t, T_{n+1}(t) := 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)\}$$

$$T_2(t) = 2tT_1(t) - T_0(t) = 2t^2 - 1$$

$$[-1, 1] \times [-1, 1]$$



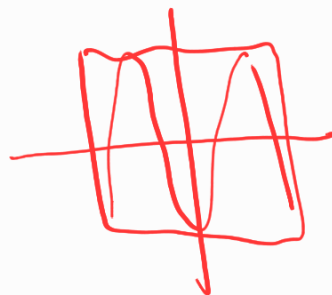
$$T_3(t) = 2tT_2(t) - T_1(t) =$$

$$= 2t(2t^2 - 1) - t = 4t^3 - 3t$$

dato razpore
knjfo

$$T_4(t) = 2t(4t^3 - 3t) - (2t^2 - 1) =$$

$$= 8t^4 - 6t^2 - 2t^2 + 1 = 8(t^4 - t^2) + 1$$



$$\deg T_n(t) = n$$

T_n se na $\bar{I}$ obnaša

$$\text{kot } T_n(t) = \cos(n \arccos t), t \in \bar{I}$$

$$T_n(t) = 0 \Leftrightarrow n \arccos t = \frac{2k-1}{2} \pi$$

$$\Leftrightarrow t = \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Za $k=1, \dots, n$ dobimo n različnih ničel od T_n na I

$$\dot{T}_n(t) = \frac{n}{\sqrt{1-t^2}} \sin(n \arccos t)$$

Za $t \in I$ velja $\dot{T}_n(t) = 0 \Leftrightarrow n \arccos t = k\pi$
 $\Leftrightarrow t = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$

Za $k=1, \dots, n-1$ nam to da $n-1$ različnih ničel od $\dot{T}_n$ na I . Torej dobimo $n-1$ lokalnih ~~minimov~~ ~~maks~~ ~~od~~ T_n . Ker velja deg $\dot{T}_n = n-1$ imamo drugih ničel.

Naj bo $\varphi_{m,n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (T_m(t), T_n(t))$

$$\bar{\varphi}_{m,n} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad t \mapsto (T_m(t), T_n(t))$$

Slučaj $C_{m,n} := \varphi_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ in

$$\bar{C}_{m,n} = \bar{\varphi}_{m,n}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^2 \quad \text{se}$$

imenjuje Chebysheve krivulje.

1202 (c) Če sta m in n tujca in velja $m < n$,
potem velja

• $\overline{C}_{m,n} \subset \mathbb{C}^2$ je algebrska, stopnje n in
neregularna.

• $\overline{C}_{m,n}$ ima $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$ singularnih točk
(več so namreč dvojne sty. točke)

R
ok

(c) uporabimo tudi za $m=n-1$ določimo tako primer,
ki ga želimo pri primer kvadratnega, ki je neregularna
in ima namreč $\binom{d-1}{2}$ sty. točk, kjer je d stopnje
kvadrata ($d=n$).

Ideja da ima ta kvadrat dejansko $\binom{d-1}{2}$ sty. točk:

~~$\overline{C}_{m,n}$ je singularna v $(x,y) \in \mathbb{C}^2$~~

① pokažemo, da velja

$$\overline{C}_{m,n} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid T_n(x) = T_{n-1}(y) \right\}$$

(dokazujemo določeno)

potrebno
Dawlj obravnavati $T_n(x) - T_{n-1}(y)$.

n.m. točka in rešitve: skrajna točka od

$$f(x, y) = T_n(x) - T_m(y) :$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$p = T_n(x) - T_m(y)$$

$$\begin{aligned} (*) & \left[\cos(n \arccos x) = \cos(m \arccos y) \right] \\ (**) & \left[\sin(n \arccos x) = \sin(m \arccos y) = 0 \right] \end{aligned}$$

$$\text{then } \frac{\partial T_n}{\partial x} = \sin(n \arccos x) = 0$$

is possible
also

$$\frac{\partial T_n}{\partial y} = \sin(m \arccos y) = 0$$

(**): using (**) we have

$$x = \cos \frac{k}{n} \pi \quad \text{for } k = 1, \dots, n-1$$

$$y = \cos \frac{l}{m} \pi \quad \text{for } l = 1, \dots, m-1$$

Immun $(n-1)(m-1)$ moduli in $(x, y) \in I \times I$.

Is (*) satisfied, the values $x = \cos \frac{k}{n} \pi$ in

$$y = \cos \frac{l}{m} \pi \quad \text{do not satisfy}$$

$$\cos(l\pi) = \cos(k\pi)$$

$$\Rightarrow k-l \text{ odd} \Rightarrow \text{more sum } \frac{1}{2}(n-1)(m-1)$$

$$\text{total. For } m = m-1 \text{ do not } \underline{\underline{\binom{n-1}{2}}}.$$